9) Dos cuerpos de igual masa están colgados de muelles independientes de constantes k_1 y k_2, siendo $k_1 < k_2$. Ambos oscilan con igual amplitud. ¿Para qué sistema la velocidad máxima es mayor?

$$\text{Como } v_{max} = A\omega = A \cdot 2\pi f = A \cdot 2\pi \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = A\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{v_{m1}}{v_{m2}} = \frac{A\sqrt{\frac{k_1}{m}}}{A\sqrt{\frac{k_2}{m}}} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \text{ y como}$$

$$k_1 < k_2 \Rightarrow v_{1m} < v_{2m}$$

10) Una bola colocada en el extremo de un cable de 9,8 m se utiliza en el derribo de edificios. Si se suelta desde un desplazamiento angular de 40°, calcula la máxima velocidad de la bola.

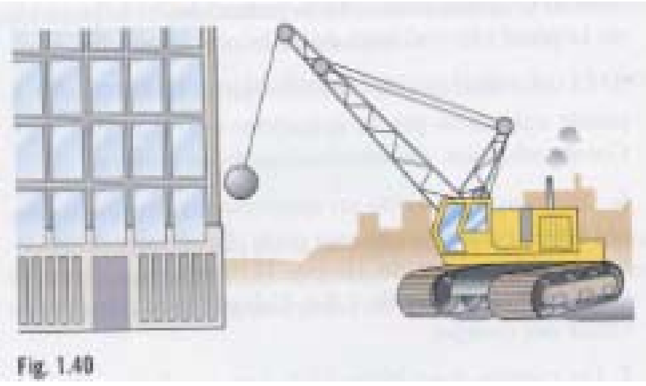
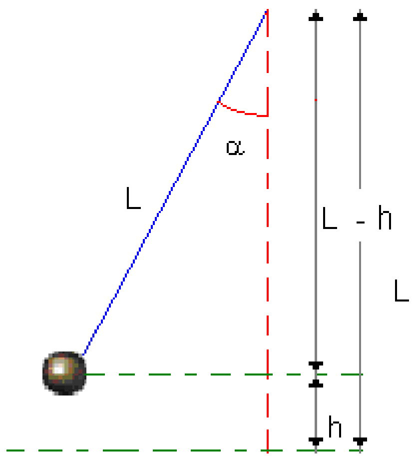


Fig. 1.40



Aplicamos el principio de conservación de la energía a la posición vertical y cuando está separado 40º (altura h):

$$Ec = Ep \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}$$

necesitamos conocer h, que la calculamos mediante la trigonometría :

$$\cos\alpha = \frac{L-h}{L} \Rightarrow L\cos\alpha = L - h \Leftrightarrow h = L - L\cos\alpha = L(1-\cos\alpha)$$

$$h = L(1 - \cos\alpha) = 9{,}8 \text{ m } (1 - \cos 40º) = 2{,}29 \text{ m.}$$

$$\text{Luego: } v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}29} = 6{,}69\ \frac{m}{s}$$

11) Desde una pendiente de 30° se soltó un cuerpo. Cuando terminó de recorrer toda la pendiente, siguió moviéndose por un suelo horizontal. Si la distancia d recorrida en el suelo horizontal hasta detenerse es igual a la que recorrió en la pendiente, calcula el coeficiente de rozamiento (que es el mismo tanto en el tramo horizontal como en el inclinado).

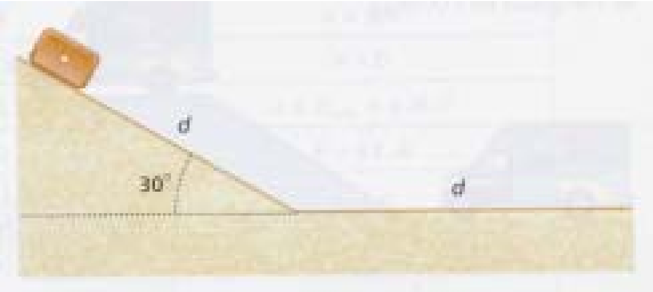
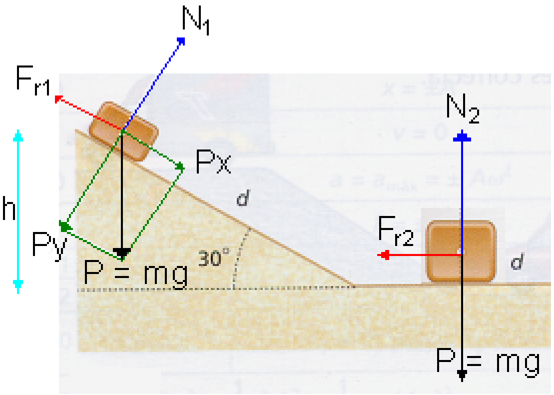


Fig. 1.41

✧✧✧❉❉❉❉❉✧✧✧

En el punto más alto del plano inclinado, el cuerpo sólo tiene energía potencial, a medida que se desplaza va perdiendo energía por el rozamiento hasta que se para (energía mecánica nula) :

Ep – E de la fuerza de rozamiento en el plano inclinado – E perdida en el plano horizontal = 0.



$$mgh - F_{r1}\cdot d - F_{r2}\cdot d = 0$$

$$mgh - \mu N_1 d - \mu N_2 d = 0;\ mgh - \mu P_y d - \mu P d = 0$$

$$mgh - \mu P\cos 30^o\, d - \mu P d = 0$$

$mgd\,sen30^o - \mu mg\cos 30^o\, d - \mu mgd = 0$, simplificando el producto mgd y despejando el coeficiente :

$$sen30^o = \mu(\cos 30^o + 1) \Leftrightarrow \mu = \frac{sen30^o}{1+\cos 30^\circ} = 0{,}27$$

✧✧✧❉❉❉❉❉✧✧✧

12) Desde el punto A, a 3 m de un muelle de k= 8 N m se dispara hacia el resorte un cuerpo de 1 kg a 4 m/s. El coeficiente de fricción entre el cuerpo y el suelo es 0,1. Calcula, tomando g= 10 m/ s^2:

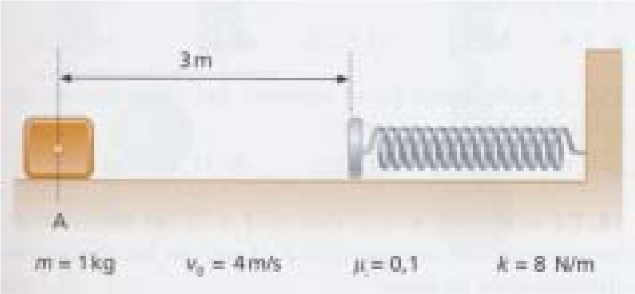


Fig. 1.42

a) La máxima compresión del muelle.

b) La distancia de A a la que se detendrá el cuerpo en su movimiento de retorno.

✧✧✧⌘⌘⌘⌘⌘✧✧✧

a) La energía cinética que el cuerpo posee en A se invierte, una parte se pierde en rozamiento hasta que llega al muelle y lo que queda en forma de energía cinética se emplea en la energía potencial elástica de compresión del muelle y en pérdida de rozamiento hasta la máxima compresión (x) :

$E_c^1 = E_{Fr}^1 + E_c^2 = E_{Fr}^1 + E_p^e + E_{Fr}^2$, luego $\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu mgd + \frac{1}{2}kx^2 + \mu mgx$, sustituyendo:

$\frac{1}{2}1\cdot 4^2 = 0{,}1\cdot 1\cdot 10\cdot 3 + \frac{1}{2}8x^2 + 0{,}1\cdot 1\cdot 10x \Leftrightarrow 4x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = -\frac{5}{4} \\ x = 1 \end{Bmatrix}$ como la primera solución no es válida (al ser negativa) x = 1 m

b) Al descomprimirse el muelle lanzará al cuerpo en sentido contrario una distancia (D) tal que se consuma la energía potencial elástica que posee en forma de energía perdida por las fuerzas de rozamiento :

$E_P^e = E_{Fr}^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \mu mgD \Rightarrow D = \frac{kx^2}{2\mu mg} = \frac{8\cdot 1^2}{2\cdot 0{,}1\cdot 1\cdot 10} = \frac{8}{2} = 4\text{m}$, luego, como es lógico, vuelve al punto de partida **A**, que está a una distancia de 3 + 1 = 4 m.

✧✧✧⌘⌘⌘⌘⌘✧✧✧

13) El cable de un montacargas (masa total: 1 820 kg) se rompe de forma repentina en un momento en que estaba en reposo. El mecanismo de seguridad hace que unas guías laterales ejerzan una fuerza de frenada constante de 4450 N. En la parte inferior del hueco del montacargas hay un muelle vertical cuyo valor de k es igual a 1 460 N /cm. Calcula la máxima compresión del muelle, teniendo en cuenta que el montacargas cayó desde una altura de 3,7 m sobre el muelle.

✧✧✧⌘⌘⌘⌘⌘✧✧✧

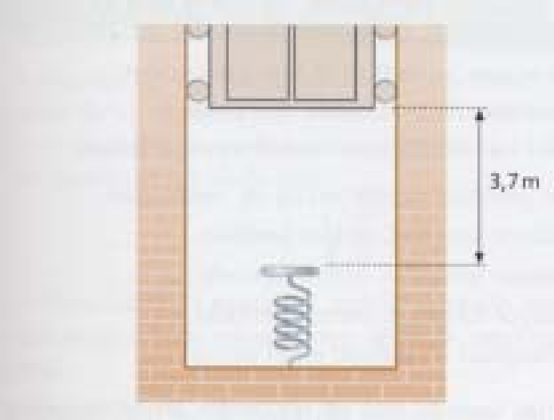


Fig. 1.43

m = 1 820 kg.
F_r = 4 450.
k = 14,60 N/m.
h = 3,7 m.
x = distancia de compresión.

La energía potencial del montacargas se emplea en trabajo de rozamiento de frenada y energía cinética que al chocar con el muelle lo comprime una distancia x gastándose en la energía potencial elástica y trabajo de frenado:

$E_p = E_{Fr}^1 + E_c = E_{Fr}^1 + E_p^E + E_{Fr}^2 \Leftrightarrow mgh = F_r h + \frac{1}{2}kx^2 + F_r x$, en donde, sustituyendo y despejando, obtenemos x :

$$1820{\cdot}9{,}8{\cdot}3{,}7 = 4450{\cdot}3{,}7 + \frac{1}{2}14{,}60{\cdot}x^2 + 4450x \Leftrightarrow 7{,}3x^2 + 4450x - 49528{,}2 = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} 5{,}59\ \text{m} \\ -615{,}18 \end{Bmatrix}$$

luego la máxima compresión es **x = 5,59 m**.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

14) Calcula el trabajo que realiza cada una de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo de 2,0 kg de masa cuando es desplazado 10 m por un plano inclinado 30° con una fuerza constante de 25 N paralela ala dirección del movimiento (Fig. 1.44). El coeficiente de rozamiento vale 0,14.

Si inicialmente se encontraba en reposo, calcula, aplicando el teorema de la energía cinética, la velocidad que tiene el cuerpo al recorrer estos 10 m.

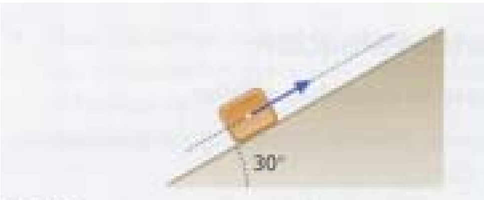


Fig. 1.44

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

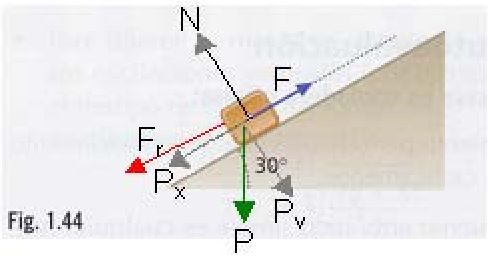


Fig. 1.44

En el gráfico adjunto se indican la fuerzas que actúan. Calculamos ahora el trabajo de estas fuerzas:

❍ Trabajo de la fuerza aplicada = W = F · d =25 N · 10 m = **250 J**.

❍ Trabajo de la normal = W_N = F · d · cos90º = **0 J** (es perpendicular al desplazamiento).

❍ Trabajo de la componente vertical del peso P_y = W_{Py} = P_y · d cos270º = **0 J** (también es perpendicular al desplazamiento).

❍ Trabajo de la componente horizontal del peso = W_{Px} = P_x · d cos 180º = mg sen30º · 10 · cos180º = 2 · 9,8 · sen30º · 10 · cos 180º = **- 98 J** ·

❍ Trabajo de las fuerzas de rozamiento = W_{Fr}= F_r · d · cos180º = μ · N · d · cos 180º = μ · P_y · d · cos 180º = μ · mg cos30º · d · cos 180º = 0,14 · 2,0 · 9,8 · cos30º · 10 · cos180º = **- 23,76 J**.

La diferencia entre la energía suministrada por la fuerza F y las consumidas es la energía cinética que resta :

$$W + W_{Px} + W_{Fr} = E_c \ ;\ 250 - 98 - 23{,}76 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2{\cdot}128{,}24}{2}} \approx 11.32\ \frac{m}{s}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

15) Un motor eléctrico de 20,0 kg debe ir montado sobre cuatro muelles iguales. Calcula cuál debe ser la constante recuperadora de cada resorte (en N / cm`) si se desea que la frecuencia de oscilación del motor sea de 4,00 Hz.

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = (2\pi f)^2 m = (2\pi \cdot 4{,}00)^2 \cdot 20{,}0 = 12633\ \frac{N}{m} \Rightarrow k_1 = \frac{k}{4} = 3158\ \frac{N}{m} = 31{,}58\ \frac{N}{cm}$$

16) Calcula el periodo del movimiento de la masa M de la figura 1.45 sin tener en consideración los rozamientos.

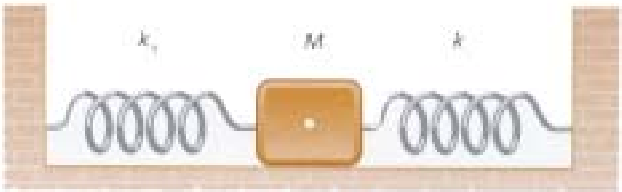


Fig. 1.45

Datos: M = 250 g; k_1 = 20 N / m ; k_2 = 30 N / m.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}25}{20 + 30}} = 0{,}444\ s$$

17) Un cuerpo se fija al extremo libre de un resorte vertical que cuelga de un soporte. Si el cuerpo se baja lentamente, desde la posición del muelle sin deformar hasta la posición de equilibrio, éste se estira una distancia **d**. Calcula la máxima deformación que experimentará el resorte si el mismo cuerpo se fija al mismo resorte pero se deja caer, en lugar de que baje lentamente.

En la posición de equilibrio, la fuerza recuperadora (F) es igual al peso y F = P = - k d.

Cuando se le deja caer y se estira una distancia x, la nueva fuerza recuperadora (F_1) ha de ser igual (y de sentido contrario) a la suma de F + P, es decir :

F_1 = F + P; - kx = 2F = 2P = -2kd, luego x = 2d es la distancia que ahora se estira el muelle.

18) Halla la aceleración de la gravedad en un lugar donde un péndulo simple de 150 cm de longitud realiza 100 oscilaciones en 246 s.

L = longitud = 150 cm = 1,50 m.
θ = nº de oscilaciones = 100 vueltas.
t = tiempo = 24 6 s.

- Calculamos primero el período $T = \frac{t}{\theta} = \frac{246\ s}{100\ vueltas} = 2{,}46\ \frac{s}{vuelta}$.

- Aplicando ahora la fórmula del período del péndulo, podemos despejar g :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Leftrightarrow g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1{,}50}{2{,}46^2} = 9{,}79\ \frac{m}{s^2}$$

✧✧✧⌖⌖⟐⌖⌖✧✧✧

19) ¿En qué punto de la trayectoria de un péndulo simple son máximas o mínimas las magnitudes siguientes: velocidad, aceleración normal, aceleración tangencial?

✧✧✧⌖⌖⟐⌖⌖✧✧✧

	Velocidad	A. Normal	A. tangencial
Máxima	En el centro	En el centro	En los extremos
Mínima	En los extremos	En los extremos	En el centro

✧✧✧⌖⌖⟐⌖⌖✧✧✧

20) Un reloj de péndulo ajustado en un lugar en el cual la gravedades g= 9,6720 m/s^2 se traslada a otro lugar donde g = 9,8123 m/s^2. ¿Cuánto se retrasará o adelantará en un día?

✧✧✧⌖⌖⟐⌖⌖✧✧✧

$g_1 = 9{,}6720\ m/s^2$.
$g_2 = 9{,}8123\ m/s^2$.

Aplicamos la fórmula del período de un péndulo simple a ambos lugares :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L}{g_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{L}{g_2}}} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} = \sqrt{\frac{9{,}8123}{9{,}6720}} = 1{,}007$$

, es decir $T_1 = 1{,}007\ T_2$, el período en el primer lugar es mayor que en el segundo, en donde, al ir más rápido, adelantará. ¿Cuánto?, veámoslo :

La diferencia entre el período de ambos en una vuelta es de 0,007 s.

Luego en un día = 24 · 3 600 s = 86 400 s, en el segundo lugar adelantará :

86 400 · 0,007 = 604,8 s = 10 min 5 s.

✧✧✧⌖⌖⟐⌖⌖✧✧✧

21) El movimiento del pistón de un cilindro de un automóvil es, aproximadamente, armónico simple. Si su carrera es 10 cm y el motor gira a 3 600 rpm, calcula su velocidad, expresada en km/ h, cuando pasa por el punto medio de su carrera.

L = carrera = 10 cm = 0,1 m.

ω = velocidad angular = 3 600 rpm = $3600\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}} \cdot \frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}} = 377\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Si la carrera es de 0,1 m 2A = 0,1 m y, por tanto A = L/2 = 0,05 m.

En el punto medio de su carrera la velocidad es máxima :

$$v_{max} = A\omega = 0{,}05\cdot 377 = 18{,}85\ \text{m/s} = 67{,}86\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Test de autoevaluación

Indica si la frase es verdadera o falsa:

1 Un movimiento periódico es cualquier movimiento que se repita cíclicamente.

Verdadero ya que un movimiento periódico es aquel que se repite cíclicamente cada cierto intervalo de tiempo llamado período.

2 Un movimiento armónico simple es cualquier movimiento periódico de una partícula.

Falsa, además de ser periódico debe existir una fuerza recuperadora proporcional al desplazamiento.

3 La frecuencia de un movimiento periódico es el número de ciclos completos en cada unidad de tiempo.

Obviando el calificativo “completos”, la podemos considerar **verdadera**.

4 La velocidad máxima de una partícula que experimenta un movimiento armónico simple es igual a la amplitud multiplicada por la frecuencia.

Falso, es igual a la amplitud por la frecuencia angular o pulsación.

5 La frecuencia de un movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud.

Falso, la frecuencia es el tiempo que emplea en una oscilación completa (4A), ese tiempo, para una misma Amplitud puede ser variable.

6 La distancia total recorrida por una partícula que realiza un ciclo completo de un movimiento armónico simple es el doble de la amplitud.

Falso, como hemos dicho en la cuestión anterior es 4 veces la amplitud, ya que para ir al extremo opuesto hay que recorrer 2ª y otras 2ª para volver al punto de partida y realizar el ciclo completo.

7 En el punto en el que la velocidad de una partícula la que realiza un M.A.S. es máxima, su aceleración también es máxima.

Falso, donde la velocidad es máxima, centro, la aceleración es nula.

8 La frecuencia de una masa m que describe un M.A.S. en el extremo de un muelle vertical es independiente de m.

Falso, $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, luego es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa.

9 Para una amplitud dada de una oscilación, la energía total de la masa que oscila en el extremo de muelle es independiente de la masa.

Verdadero, $E = \frac{1}{2}kA^2$, sólo depende de k y A.

10 La frecuencia de un péndulo simple es independiente de su masa.

Verdadero, $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$, sólo depende de la intensidad del campo gravitatorio en ese punto y de la longitud.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Elige la respuesta correcta:

11 En un M.A.S., la aceleración es:

- **a)** Constante.
- **b)** Proporcional al desplazamiento respecto de la posición central.
- **c)** Inversamente proporcional al desplazamiento respecto de la posición central.
- **d)** Crece cuando la velocidad crece.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como $a = -w^2x$, la respuesta correcta es **b)** proporcional (y de signo opuesto) a la elongación.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

12 Un resorte elástico de masa despreciable está fijo por uno de sus extremos y por el otro sostiene una masa de 5 kg. Se separa la masa de su posición de equilibrio, se suelta y se observa que el cuerpo realiza oscilaciones armónicas tales que 10 oscilaciones duran 31,4 s. La constante recuperadora del muelle es, en N/m.

a) 20 **b)** 1 /20 **c)** 5 **d)** 1 /5 **e)** 400

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$\text{El periodo es : } T = \frac{31{,}4\text{ s}}{10\text{ oscilaciones}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{3{,}14^2} \approx 4m = 4\cdot 5 = 20\,\frac{N}{m}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

13 Un punto efectúa un M.A.S. Los extremos de la oscilación están separados 10 cm entre sí y tarda 2 s en recorrer esta distancia. La frecuencia es:

a) 4Hz **b)** 2Hz **c)** 1/2Hz **d)** 1/4Hz **e)** 10Hz

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Si en recorrer media oscilación tarda 2 s en una vuelta completa tardará 4 s, luego la frecuencia será f = ¼ Hz, luego la respuesta correcta es la **d)**.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

1 4 El módulo de la velocidad de la partícula anterior, cuando pasa por el centro de su recorrido, es (en cm s^{-1}):

a) 7, 9 **b)** 5 **c)** 62, 8 **d)** 10 **e)** 15, 8

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Cuando pasa por el centro del recorrido la velocidad es máxima:

$$|v_{max}| = A\omega = A2\pi f = 0{,}05\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4} = 0{,}0785\ldots m/s = 7{,}85..m/s\text{, la correcta es la } \textbf{a)}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

1 5 La aceleración en el extremo del recorrido es, en valor absoluto y en cm s^{-2} :

a) 9,9 **b)** 215 **c)** 12,3 **d)** 31,4 **e)** 342

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$|a_{max}| = A\omega^2 = A(2\pi f)^2 = 0{,}05(2\pi\cdot 0{,}25)^2 = 0{,}123\,\frac{m}{s^2} = 12{,}3\,\frac{cm}{s^2}$$

Opción **c)** la correcta.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

1 6 La ecuación x = 2 cos (5 t + 0,5π) describe el movimiento de una partícula. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?:

a) La velocidad inicial es -10 m s^{-1}.
b) La amplitud es 2 m.
c) La fase inicial es 0,5n rad.
d) La frecuencia angular es 5 rad s^{-1}.
e) El periodo es 2,5 s.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

a) $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2\cos(5t+0{,}5\pi)) = -10\,\mathrm{sen}(5t+0{,}5\pi)$, la velocidad inicial es la velocidad cuando t = 0, v_0 = -10 sen(π/2)= -10 m/s.

b) Comparamos $\left\{\begin{matrix} x = A\cos(\omega t+\delta) \\ x = 2\cos(5t+0{,}5\pi)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ A= 2 m.

c) De la comparación del apartado anterior, se deduce también que $\delta = 0{,}5\pi$.

d) También se deduce que $\omega = 5$ rad/s.

e) $\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} = 1{,}26$ s. Es falso.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

1 7 Tenemos dos péndulos simples (A y B) en la misma habitación. La masa y la longitud de B son cuatro veces las de A. ¿Cuál de las siguientes frases es cierta?:

a) Sus periodos son iguales, ya que la relación L/m es la misma para ambos.
b) La frecuencia de B es doble que la de A.
c) El periodo de B es doble que el de A.
d) Todas las afirmaciones anteriores son falsas.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$L_B = 4L_A$; $m_B = 4m_4$

a) Comparamos períodos: $\frac{T_A}{T_B} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L_A}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{L_B}{g}}} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} = \sqrt{\frac{L_A}{4L_A}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_B = 2T_A$. Falso.

b) $\frac{f_A}{f_B} = \frac{1/T_A}{1/T_B} = \frac{T_B}{T_A} = \frac{2T_A}{T_A} = 2 \Rightarrow f_A = 2f_B$. Falso.

c) Es verdadera como hemos demostrado en **a**).

d) Falso, pues la **c)** es la verdadera.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

1 8 Un péndulo simple oscila de modo que:

a) A mayor longitud, mayor periodo.
b) A menor longitud, mayor periodo.
c) A mayor longitud, menor periodo.
d) Su longitud no influye en el periodo.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, el período es directamente proporcional a la raíz de la longitud, luego el apartado correcto es el **a)**.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

19 A un cuerpo, que se encuentra en reposo sobre un suelo horizontal, se le aplica una fuerza horizontal constante. Si no se tiene en consideración ningún rozamiento, ¿cuál de las siguientes gráficas corresponde a la variación de la energía cinética del cuerpo con el tiempo.

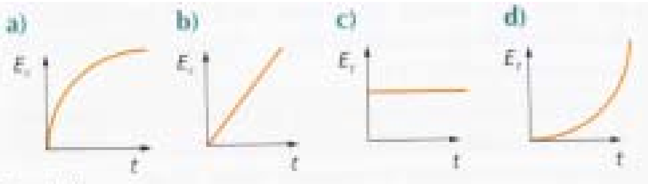


Fig. 1.46

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Como $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, como una fuerza constante produce una aceleración constante, el módulo de la velocidad aumenta con el tiempo y, como la energía cinética crece depende del cuadrado de la velocidad, la correcta sería la **d)**, la a) parece logarítmica, la b) es lineal y en c) la energía cinética permanece constante.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧