1) La ecuación de un M.A.S., en unidades del SI, es: $x = 0{,}10\,\text{sen}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Calcula la velocidad en t = 0.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Hallamos al ecuación de la velocidad derivando la elongación :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0{,}10\,\text{sen}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0{,}10\cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\cdot 10 = \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$$

y ahora sustituimos t por 0 :

$$v(0) = v_0 = \cos\left(10\cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0\,\frac{m}{s}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

2) La ecuación de un movimiento armónico simple es x = 0,030 cos (600 t + π/2), en unidades del SI. Establece el periodo del mismo y, para t= 0, la posición y la velocidad de la partícula.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Como la ecuación general de la elongación(en función del coseno) es:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)\ \text{si comparamos con}\ x = 0{,}030\cos\left(600t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{deducimos}\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 600$$

luego T = $2\pi/600$ = 0,0 1 s.

Para hallar la posición sustituimos en la ecuación de la elongación el tiempo por 0:

$$x = 0{,}030\cos\left(600t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}030\cos\left(600\cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}030\cos\frac{\pi}{2} = 0\ m$$

hallamos ahora la ecuación de la velocidad :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0{,}030\cos\left(600t + \frac{\pi}{2}\right)\right] = -18\,\text{sen}\left(600t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{y ahora hacemos t = 0 :}$$

$$v(0) = -18\,\text{sen}\left(600\cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) = -18\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -18\,\frac{m}{s}$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

3) Establece la ecuación del movimiento de una partícula que describe un M.A.S. cuyo periodo es de 2 s, sabiendo que en el instante inicial tiene velocidad nula y se encuentra a 6 cm a la derecha de la posición de equilibrio.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Como para t = 0 está a 6 cm con v = 0, A = 0,06 m y $\varphi_0 = 0$, luego la ecuación es :

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) = 0{,}06\cos\left(\frac{2\pi}{2}t + 0\right) = 0{,}06\cos(\pi t)\ \text{m}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

4) Una partícula inicia un movimiento armónico simple en el extremo de su trayectoria y tarda 0,10 s en ir al centro de la misma. Si la distancia entre ambas posiciones es 0,20 m, calcula:

- **a)** el periodo del movimiento y su frecuencia;
- **b)** la pulsación;
- **c)** la posición de la partícula 1 s después de iniciar el movimiento.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

a) Período = tiempo que tarda en dar una vuelta completa volviendo a la posición inicial. Como en la cuarta parte tarda 0,10 s, T = 4 · 0,10 s = 0, 40 s y por tanto la frecuencia

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5\ \text{s}^{-1}$$

b) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\omega}{0{,}4} = 15{,}71\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

c) Como el período es T = 0,40 s, 1/0,40 = 2,5 vueltas, es decir 2 vueltas y media, luego estará en el otro extremo de la trayectoria.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

5) La velocidad de una partícula que describe un M.A.S. puede calcularse por la ecuación: $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$. Comprueba que, dimensionalmente, es correcta.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

$$[\omega] = \left[\frac{2\pi}{T}\right] = T^{-1}$$

$$\begin{array}{l}[A^2] = L^2 \\ [x^2] = L^2\end{array} \Rightarrow [A^2 - x^2] = L^2 \Rightarrow \left[\sqrt{A^2 - x^2}\right] = \left[\sqrt{L^2}\right] = L \Rightarrow [v] = \left[\omega\sqrt{A^2 - x^2}\right] = LT^{-1}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

6) Un cuerpo describe un movimiento armónico simple entre dos puntos de una recta. Entre estos dos puntos, la distancia es de 10 cm. El tiempo que tarda en ir del uno al otro es de 1,0 s. Calcula la máxima velocidad del cuerpo.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

La velocidad máxima viene dada por $v_{max} = \pm A\omega$, necesitamos conocer :

A = amplitud = Distancia entre entremos /2 = 0,10/2 = 0,05 m.

T = período = 2 · 1,0 = 2, 0 s.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \ \frac{rad}{s}$$

Luego $v_{max} = \pm A\omega = \pm 0{,}05 \text{ m} \cdot \pi = \pm 0{,}16$ m/s.

7) Un camión llega al inicio de una pendiente con una determinada velocidad. En este momento se le para el motor, pero sube la rampa hasta llegar a la zona más alta, en la que se detiene. Si se supone que en todo el trayecto no hay rozamientos, indica cuál de las siguientes frases es correcta (y justifica la elección):

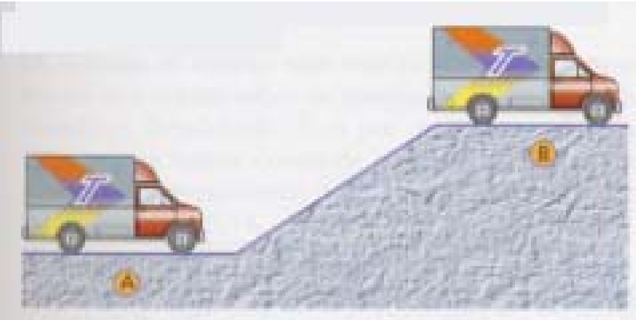

Fig. 1.37

a) Tiene más energía en el punto A.
b) Tiene más energía en el punto B.
c) Tiene igual energía en ambos puntos.
d) Ninguna es correcta.

Si suponemos una situación ideal sin rozamiento y teniendo en cuenta el principio de conservación de la energía, esta ha de conservarse y por tanto tiene la misma energía en A (cinética) y en B (potencial) con lo que la respuesta correcta es la **c)**

8) Un cuerpo de masa 1,4 kg se conecta a un muelle de constante elástica 15 N m^{-1} y el sistema oscila tal como indica la figura 1.38. La amplitud del movimiento es de 2,0 cm. Calcula:

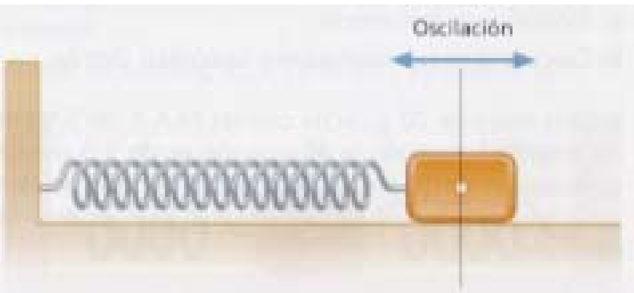

Fig. 1.38

a) La energía total del sistema.
b) Las energías cinética y potencial cuando el cuerpo pasa por el punto P, que dista 1,3 cm del punto de equilibrio.
c) La velocidad máxima del cuerpo y la que tiene cuando pasa por P.
d) La fuerza ejercida por el muelle en el instante que el cuerpo pasa por P.
e) El periodo de las oscilaciones.

a) En uno de los extremos la única energía existente es la potencial, luego la energía total es : $E_T = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}15 \cdot 0{,}02^2 = 0{,}0030\ J$

b) $E_m = E_T = E_c + E_p$, vamos a calcular la energía potencial y después la cinética por diferencia :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}15 \cdot 0{,}013^2 = 0{,}00127\ J \text{ y } E_c = E_T - E_p = 0{,}003 - 0{,}00127 = 0{,}00173\ J.$$

c) En el centro, la velocidad es máxima y la energía es sólo cinética :

$$E_T = \frac{1}{2}mv_{máx}^2 \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2E_T}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}003}{1{,}4}} = 0{,}065\ \frac{m}{s}$$

Como ya hemos calculado la energía cinética en P, podemos saber la velocidad en ese punto :

$$E_c = \frac{1}{2}mv_p^2 \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}00173}{1{,}4}} = 0{,}049\ \frac{m}{s}$$

d) $F = -kx = -15\frac{N}{m} \cdot 0{,}013m = -0{,}195\ N$

e) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}4}{15}} = 1{,}92\ s$

✧✧✧☩☩✧☩☩✧✧✧

9) Un cuerpo de 2,5 kg se deja caer desde una altura de 90 cm sobre un muelle vertical de k= 2 290 N m^{-1}. Calcula la máxima compresión del resorte.

✧✧✧☩☩✧☩☩✧✧✧

m = 2,5 kg
h = 0,90 m.
k = 2 290 N/m.

La energía que el cuerpo posee a una altura de 0,9 m se transforma en energía potencial elástica de compresión del muelle :

$$mgh = \frac{1}{2}kA^2 \Leftrightarrow A = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}9}{2290}} \approx 0{,}14\ m;\ A = 14\ cm$$

✧✧✧☩☩✧☩☩✧✧✧

10) El cuerpo de la figura 1.39, de 2,0 kg de masa, comprime 30 cm el muelle ($k = 1\ 000\ N\ m^{-1}$). Dicho cuerpo se suelta y sale disparado hacia la derecha. Calcula hasta qué altura subirá por la pendiente, si no se tiene en consideración el rozamiento.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Fig. 1.39

m = 2,0 kg
A = 0,3 m.
k = 1 000 N/m

Como en el ejercicio anterior la energía potencial elástica del muelle se comunica al cuerpo, primero en energía cinética y después en potencial hasta subir por el plano inclinado hasta una altura h.

$$E_{pe} = E_p \Leftrightarrow \frac{1}{2}kA^2 = mgh \Leftrightarrow h = \frac{kA^2}{2mg} = \frac{1000 \cdot 0{,}3^2}{2 \cdot 2{,}0 \cdot 9{,}81} = 2{,}29\ m$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

11) Si un reloj de péndulo adelanta, ¿se debe aumentar o disminuir la longitud del péndulo para corregirlo? Razona la respuesta.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Para que disminuya hay que aumentar el período de oscilación, tiempo que tarda en hacer una oscilación, como $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ para que T aumente, debe aumentarse la longitud del péndulo.

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

12) Una masa, cuando cuelga de un muelle vertical, produce en este un alargamiento de 2,0 cm. Si se estira la masa hasta colocarla 5,0 cm por debajo de la posición de equilibrio y se suelta, ¿con qué frecuencia oscilará?

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

La fuerza que produce el primer alargamiento es el peso del cuerpo P = mg y aplicando la ley de Hooke :

$$P = mg = k\,x \Leftrightarrow k = \frac{mg}{x} = \frac{m \cdot 9{,}81}{0{,}02} = 490{,}5m\ \frac{N}{m}$$

Ahora hallamos la frecuencia con que oscila al separarle de la posición de equilibrio :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{490{,}5m}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{490{,}5} = 3{,}52\ Hz$$

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

Ejercicios de consolidación

1) En un M.A.S. el módulo de la aceleración coincide con el de la elongación, expresadas en el mismo sistema de unidades. ¿Cuánto vale el periodo?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

Si |a| = |x| , luego como a = - ω^2x; tomando valores absolutos $x = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$, se deduce que T = 2$\pi$ s.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

2) Suponiendo que el movimiento de la aguja de una máquina de coser es armónico simple, de amplitud 0,30 cm y frecuencia 10 Hz, calcula su velocidad después de 1 /60 s de pasar por el centro de la trayectoria.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

A = 0, 3 cm = 0, 003 m.
f = 10 Hz.
T = 1/ 60 s

$$v(t) = A\omega\cos\omega t = 0{,}003\cdot 2\pi\cdot 10\cos 2\pi\cdot 10\cdot\frac{1}{60} = 0{,}06\pi\cos\frac{\pi}{3} = 0{,}094\ \frac{m}{s}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

3) Una pelota de masa m bota sobre una mesa. Efectúa choques perfectamente elásticos y alcanza siempre una altura de 0,31 m sobre ella. Para este movimiento periódico:

a) Establece su frecuencia.
b) Discute si es un movimiento armónico simple.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

a) Hallamos el tiempo que tarda la pelota en caer desde una altura h = 0,31 m hasta la mesa, aplicando la ecuación de la caída de graves :

$h = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}31}{9{,}81}} = 0{,}25\ s$, el tiempo que tarda en una oscilación (subir y bajar) será el doble T = 0,5 y la frecuencia f = 1/T = 1/ 0,5 = 2 Hz.

b) En un movimiento armónico simple la fuerza (dada por la ley de Hooke) es variable y proporcional a la posición pero aquí la fuerza peso es siempre constante, luego no es un M.A.S.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

4) Una masa de 20 g oscila con un M.A.S. de 5,0 cm de amplitud. Cuando la elongación es de 3,0 cm, la celeridad es de 10 cm/s. Calcula el periodo de este movimiento y la velocidad máxima que alcanza la partícula.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

m = 20 g = 0,02 kg.
A = 5,0 cm = 0,05 m.
x = 3,0 cm = 0,03 m.
v = 10 cm/s = 0,1 m/s

La relación existente entre las magnitudes viene dada por :

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \Leftrightarrow \omega = \frac{v}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}05^2 - 0{,}03^2}} = 2{,}5\ \frac{rad}{s}\ \text{y como}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2{,}5} = 2{,}51\ s\text{. La } v_{max} = A\omega = 0{,}05 \cdot 2{,}5 = 0{,}125\ \frac{m}{s}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

5) El asiento de un tractor está colocado sobre un resorte. Cuando se sienta un estudiante de 70 kg, la frecuencia de vibración es de 7 Hz. ¿Cuál es la frecuencia de las vibraciones si se sienta el profesor de física (m = 95 kg)?

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

m_1 = 70 kg.
f_1 = 7 Hz.
m_2 = 95 kg.

Aplicamos a ambos cuerpos (nunca mejor dicho) la relación $\frac{k}{m} = (2\pi f)^2$:

$$\frac{\frac{k}{m_1}}{\frac{k}{m_2}} = \frac{(2\pi f_1)^2}{(2\pi f_2)^2} \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{f_1^2}{f_2^2} \Leftrightarrow f_2 = \sqrt{f_1^2\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{7^2\frac{70}{95}} = 6\ Hz$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

6) A un resorte, cuya longitud natural cuando está colgado de un punto fijo es de 40,0 cm, se le pone una masa de 50 g en su extremo libre. Cuando la masa está en la posición de equilibrio, la longitud del resorte es 45,0 cm. La masa se desplaza 6,0 cm hacia abajo y se suelta (posición P). Calcula:

a) El valor de la constante elástica del resorte.
b) La aceleración del cuerpo cuando la partícula pasa a 2,0 cm por encima de P.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

l_0 = longitud del muelle no cargado = 40,0 cm = 0,4 m.
l_1 = longitud en el equilibrio después de colgar 50 g = 45 cm = 0,45 m.
m= masa que se cuelga = 50 g = 0,05 kg.
Δl_2 = incremento sobre la posición de equilibrio cargado = 6 cm = 0,06 m.

a) El incremento de longitud (Δl) después de colgar la masa m es $\Delta l = l_1 - l_0 = 0{,}45 - 0{,}40 = 0{,}05$ m, luego aplicando la ley de Hooke :

$$F = -mg = -k\Delta l \Leftrightarrow k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{0{,}05 \cdot 9{,}81}{0{,}05} = 9{,}81\ \frac{N}{m}$$

b) x = 4,0 cm = 0,04 m.

$a = -\omega^2 x = -(\frac{2\pi}{T})^2 x$, necesitamos hallar el período : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ luego :

$$a = \left(\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\right)^2 x = x\frac{k}{m} = 0{,}04\frac{9{,}81}{0{,}05} = 7{,}85\ \frac{m}{s^2}$$

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

7) Se sitúa verticalmente un resorte con una longitud natural de 60,0 cm y se sujeta por un extremo. Al suspender una bola de 10 kg al otro extremo se observa un alargamiento de 5,0 cm. Se provocan pequeñas oscilaciones de la bola cuyo periodo es T. A continuación se coloca el conjunto formado por la bola y el resorte sobre una mesa horizontal sin rozamiento, se fija el extremo libre y se empuja la bola, la cual describe un movimiento circular uniforme de periodo 3T Determina, tomando $g = 10\ m/s^2$:

a) La constante recuperadora del resorte.
b) El valor del periodo T de las oscilaciones.
c) El radio de la circunferencia que describe la bola.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

l_0 = longitud del resorte descargado = 60,0 cm.
m = masa que se suspende = 10 kg.
Δl = alargamiento al colgar la masa m =5,0 cm = 0,05 m.

a) $F = -mg = -k\Delta l \Leftrightarrow k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{10 \cdot 10}{0{,}05} = 2000\ \frac{N}{m}$.

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{10}{2000}} = 0{,}44$ s

c) La fuerza recuperadora dada por la ley de Hooke se equilibra por la fuerza centrífuga debida al movimiento circular :

$$F = kx = m\,\omega^2 R = F_c\,;\; kx = m\omega^2(0{,}6 + x)\,;2000x = 10\left(\frac{2\pi}{3T}\right)^2(0{,}6 + x)\,;(2000 - 226{,}6)x = 136$$

$x = \dfrac{136}{1773{,}4} \approx 0{,}08$ m, luego el radio es R = 0,6 +0,08 = 0,68 m.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

8) La amplitud de un M.A.S. de un cuerpo de 2,0 kg es 25 cm, y su periodo, 3,0 s. Calcula:

a) Su velocidad máxima.
b) Su aceleración máxima.
c) El valor máximo de la fuerza restauradora.
d) La energía mecánica máxima de este oscilador armónico.
e) El valor de estas cuatro magnitudes cuando la elongación es x = 15 cm.

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧

m = 2,0 kg.
A = 25 cm = 0,25 m.
T = 3,0 s.

a) $v_{max} = \pm A\,\omega = \pm A\,\dfrac{2\pi}{T} = \pm 0{,}25\,\dfrac{2\pi}{3} = 0{,}52\,\dfrac{m}{s}$

b) $a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm A\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 = \pm 0{,}25\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)^2 = \pm 1{,}1\,\dfrac{m}{s^2}$

c) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Leftrightarrow k = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2} = \dfrac{4\pi^2\cdot 2{,}0}{3^2} = 8{,}77\,\dfrac{N}{m} \Rightarrow F = \pm kA = \pm 8{,}77\cdot 0{,}25 = 2{,}19$ N

d) $E = \dfrac{1}{2}kA^2 = \dfrac{1}{2}8{,}77\cdot(0{,}25)^2 = 0{,}27$ J

e) $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \dfrac{2\pi}{3}\sqrt{0{,}25^2 - 0{,}15^2} = 0{,}42\,\dfrac{m}{s}$, $a = \omega^2 x = 0{,}66\,\dfrac{m}{s^2}$

F= ± k x = ± 8,77 · 0,15 = ± 1,32; E = 0,27 J (puesto que se conserva).

✧✧✧⌖⌖⌖⌖⌖✧✧✧