ACTIVIDADES (pág 67)

1 Cita dos ejemplos, al menos, de campo creado por una magnitud activa escalar y otros dos ejemplos de campo creado por una magnitud activa vectorial.

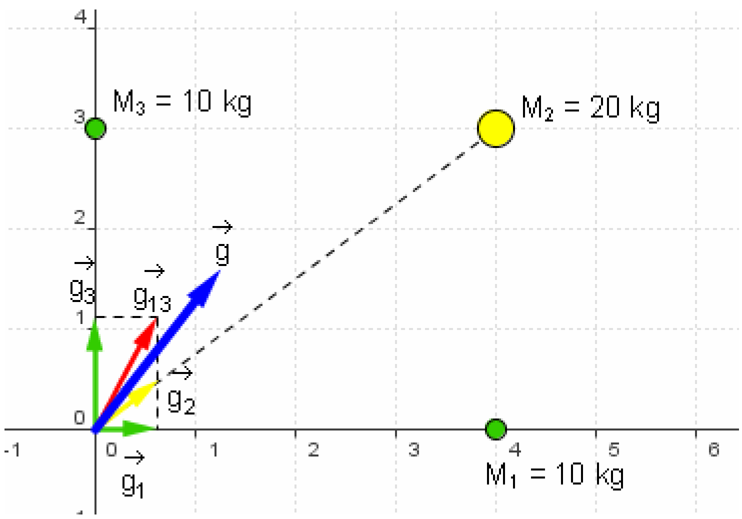
Magnitud	Tipo	Campo
Masa	Escalar	Gravitatorio
Carga	Escalar	Eléctrico
Velocidad	Vectorial	Velocidades
Carga en movimiento	Vectorial	Magnético

2 En cada uno de los ejemplos anteriores, señala cuál es la magnitud activa. En los campos vectoriales, señala si son o no son campos de fuerzas.

El campo vectorial no es un campo de fuerzas pero el magnético sí.

ACTIVIDADES (pág 69)

1 Dibuja el vector intensidad del campo gravitatorio que crea en el origen un sistema de masas como el de la figura de la derecha, teniendo en cuenta la dirección y el sentido que le corresponde.



2 En la actividad anterior, calcula el vector intensidad de campo gravitatorio. Considera G = 6,67 · 10^{-11} en unidades del S.I.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

M_1 = 10 kg M_2 = 20 kg M_3 = 10 kg

$$\vec{g}_1 = G\frac{M_1}{d_1^2}\vec{i} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{10}{4^2}\vec{i} = 4{,}17\cdot 10^{-11}\,\vec{i}\,\frac{m}{s^2}$$

$$\vec{g}_3 = G\frac{M_3}{d_3^2}\vec{j} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{10}{3^2}\vec{j} = 7{,}41\cdot 10^{-11}\,\vec{j}\,\frac{m}{s^2}$$

$$\vec{g}_2 = \vec{g}_{2x} + \vec{g}_{2y} = G\frac{M_2}{d_2^2}\left(\cos\alpha\,\vec{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}\right) = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{20}{5^2}\left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right) = 4{,}27\cdot 10^{-11}\,\vec{i} + 3{,}2\cdot 10^{-11}\,\vec{j}\,\frac{m}{s^2}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_x + \vec{g}_y = (\vec{g}_1 + \vec{g}_{2x}) + (\vec{g}_3 + \vec{g}_{2y}) = (4{,}17 + 4{,}27)\cdot 10^{-11}\,\vec{i} + (7{,}41 + 3{,}2)\cdot 10^{-11}\,\vec{j} = 8{,}44\cdot 10^{-11}\,\vec{i} + 10{,}61\cdot 10^{-11}\,\vec{j}$$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

◆ ACTIVIDADES (pág 71)

1 Considera el sistema físico propuesto en la primera actividad del epígrafe anterior. Calcula el potencial gravitatorio en el origen de coordenadas y en el punto medio del rectángulo que forma dicho punto y los tres puntos en que se sitúan las masas.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

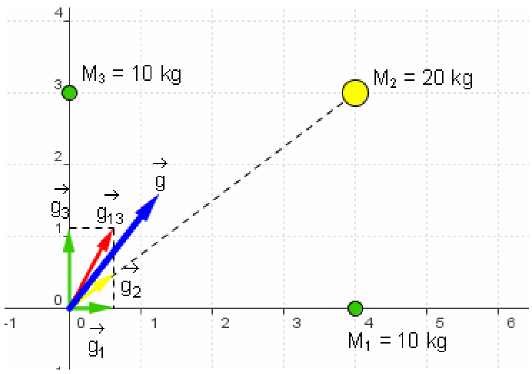
El potencial es un escalar.

$$V_{Origen} = -G\left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} + \frac{M_3}{r_3}\right) = -6{,}67\cdot 10^{-11}\left(\frac{10}{4} + \frac{20}{5} + \frac{10}{3}\right) = -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{59}{6} = -6{,}56\cdot 10^{-11}\,\frac{J}{m}$$

$$V_{P.Medio} = -G\left(\frac{M_1}{d_1} + \frac{M_2}{d_2} + \frac{M_3}{d_3}\right) = -6{,}67\cdot 10^{-11}\left(\frac{10}{2{,}5} + \frac{20}{2{,}5} + \frac{10}{2{,}5}\right) = -1{,}07\cdot 10^{-9}\,\frac{J}{m}$$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

2 Dejamos libre, en el origen del sistema de coordenadas, una masa de 1 mg. Suponiendo que no existen rozamientos y que el plano XY es perfectamente horizontal, indica hacia dónde se moverá dicha masa (si se mueve). Justifica tu respuesta.



✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

Se moverá en la dirección y sentido que marca el vector intensidad gravitatoria que hemos dibujado y cuya intensidad hemos calculado con anterioridad, con una fuerza P = m·g = $1\cdot 10^{-6}\cdot 1{,}36\cdot 10^{-10}$ m/s^2 = $1{,}36\cdot 10^{-17}$ N.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

ACTIVIDADES (pág 73)

1 ¿Existe algún punto en el que el potencial entre la Tierra y la Luna sea nulo? ¿Y la intensidad del campo gravitatorio?

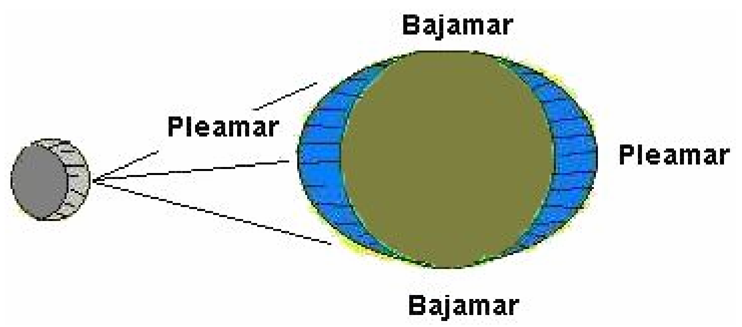
Como el potencial es un escalar negativo nunca se anulará, pero la intensidad del campo gravitatorio, al ser dos vectores de la misma dirección y sentido opuesto sí hay un punto entre la Tierra y la Luna en que se igualan sus módulos siendo nula la resultante.

2 ¿Cada cuánto tiempo se produce una pleamar? ¿Y una bajamar?

Marea es el cambio periódico del nivel del mar, producido principalmente por las fuerzas gravitacionales que ejercen la Luna y el Sol. Luego las **mareas** son movimientos de cierta amplitud de la masa de agua de nuestro planeta, y responden a la fuerza de atracción que nuestro satélite, la Luna, ejerce sobre la Tierra. En menor medida, el Sol también colabora, matizando el fenómeno y otorgándole mayor o menor importancia.

Marea alta o **pleamar**: Momento en que el agua del mar alcanza su máxima altura dentro del ciclo de las mareas.

Marea baja o **bajamar**: Momento opuesto, en que el mar alcanza su menor altura.



El tiempo aproximado entre una pleamar y la bajamar es de 6 horas 12 minutos, completando un ciclo de 24 horas 50 minutos. Se produce una pleamar cada 12 horas y 25 min y el mismo intervalo para la bajamar.

La marea alta es el reflejo de un abombamiento marino que se produce por la atracción de la Luna situada sobre ese punto; para que este abombamiento o amplitud marina pueda formarse, es preciso que una cierta cantidad de masa de agua acuda hacia allí desde otros lugares del planeta, donde, lógicamente, se produce una disminución del nivel del agua: aquí tiene lugar la marea baja.

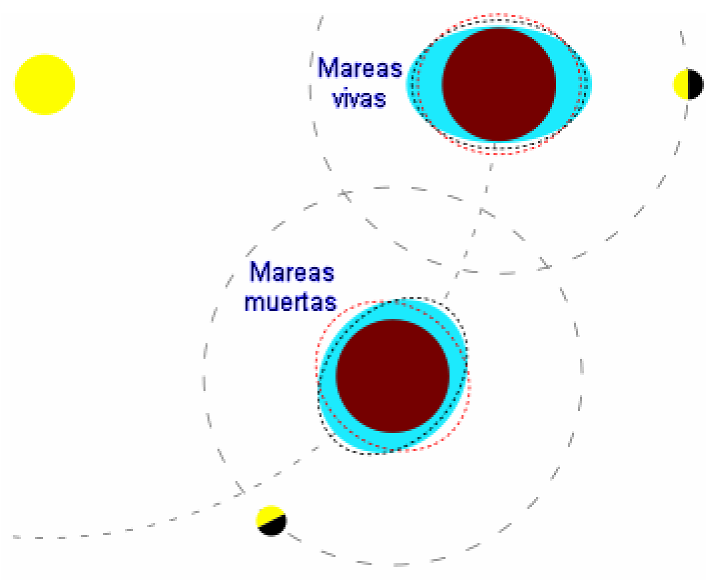
Por efecto de la rotación de la Tierra, las mareas altas no suceden exactamente cuando la Luna se encuentra sobre el meridiano de cada lugar, sino que acumula un cierto retraso, que en nuestras costas ronda las tres horas y media.

Normalmente se producen en la Tierra al mismo tiempo dos mareas altas y dos bajas: las altas en los puntos por donde cruza una línea que pasa por el centro de la tierra y se dirige a la posición de la Luna; las bajas, en los puntos situados a 90º de los citados.

3 Dibuja las posiciones del Sol y de la Luna respecto a un punto de la Tierra en los siguientes supuestos:

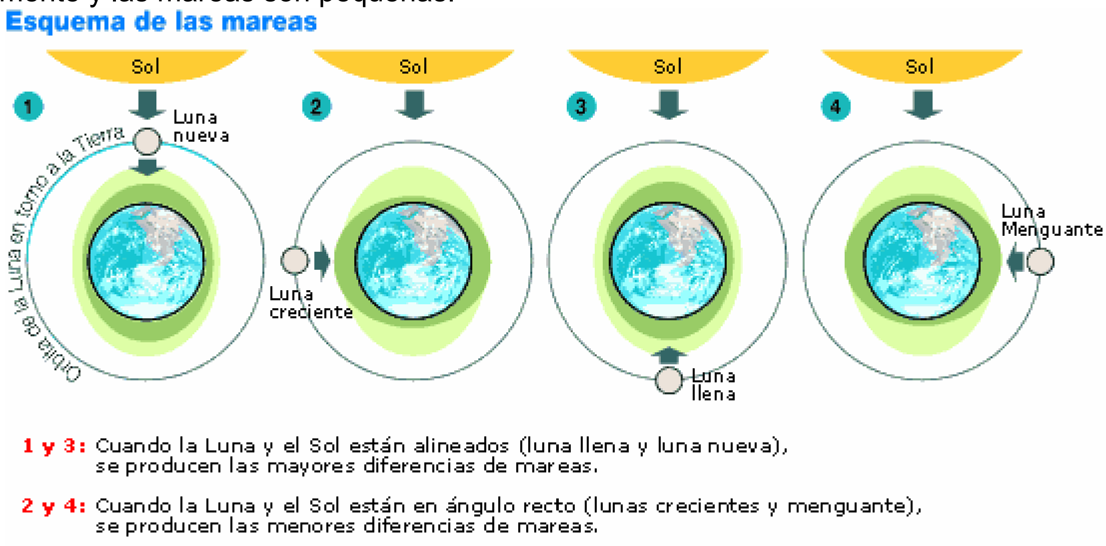
a) Cuando se produce una marea viva.

b) Cuando se produce una marea muerta.



Las distintas posiciones del Sol y de la Luna provocan también las denominadas mareas "vivas" y mareas "muertas". Las vivas tienen lugar cuando Sol, la Luna y la Tierra se encuentran situados en línea recta, con lo que la fuerza de atracción de los dos primeros sobre la masa de agua del último se suman y aumentan el nivel del mar. Las muertas se producen cuando el Sol y la Luna se encuentran situados formando un ángulo de 90º entre ambos, con lo que sus fuerzas de atracción se restas y el nivel del mar no sube tanto como en las vivas. Las mareas vivas tienen lugar durante los dos días siguientes a las fases de Luna Llena y Luna Nueva; las muertas, durante los dos días siguientes a las de Cuarto Menguante y Cuarto Creciente. Cuando la Luna y el Sol están alineados, los elipsoides (en punteado) se refuerzan y las mareas son más grandes. Cuando la Luna está en cuadratura con el Sol, los elipsoides se cancelan parcialmente y las mareas son pequeñas.

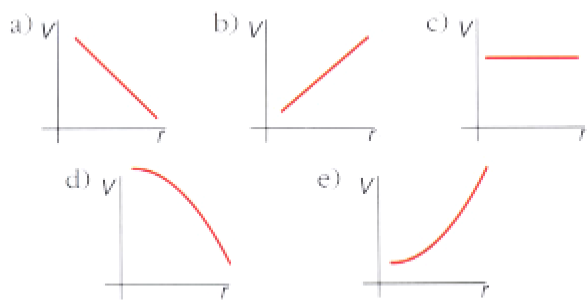
Como la Luna cruza sobre el meridiano de cada lugar de la Tierra cada día con un retraso de 50 minutos en relación con el anterior, las mareas altas y bajas, se retrasan en esos 50 minutos cada día que transcurre en relación con la víspera.



ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

① ¿Cuál de las figuras que siguen muestra cómo varía el potencial gravitatorio que crea una masa, M, en función de la distancia?

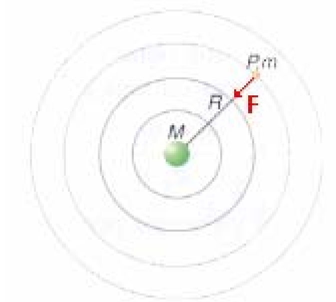


Como el potencial gravitatorio varía con la distancia según la fórmula $V(r) = -G\frac{M}{r}$ que nos indica que es inversamente proporcional a la distancia, una hipérbola, es evidente que b) y e) que aumentan con la distancia no pueden ser y tampoco c) ya que es constante, como en a) la variación es lineal nos quedamos con la gráfica d) como la que más se ajusta a la representación de V(r).

② Un objeto puntual P, de masa m, se encuentra en el interior del campo gravitatorio que crea otra masa, M. Dicho objeto se mueve con m.c.u., de radio R, alrededor de la masa M:

a) Calcula la energía que consume al dar una vuelta.
b) Si el objeto estuviera inicialmente en reposo, ¿cómo se movería? Indícalo sobre la figura.

a) La energía potencial es $E_p = -G\frac{Mm}{r}$ de igualar la fuerza de atracción gravitatoria con la centrípeta tenemos $G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r}$ luego la energía cinética en la órbita es $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{2r}$ y la energía mecánica será $E = E_p + E_c = -G\frac{Mm}{r} + G\frac{Mm}{2r} = -G\frac{Mm}{2r}$.



b) Si está en reposo en el punto P el cuerpo de masa m se moverá hacia el de masa M que lo atrae con una fuerza dada por la ley de gravitación universal $F = G\frac{Mm}{r^2}$ según el dibujo adjunto.

③ Comenta la siguiente frase: `Dado un campo de fuerzas, siempre es posible encontrar una energía potencial asociada a él".

Sólo si el campo es conservativo, es decir si el trabajo para trasladar un objeto de un punto a otro distinto del campo sólo depende de las posiciones inicial y final y no de la trayectoria que se siga.

④ Calcula el campo y el potencial gravitatorios que crean dos masas puntuales iguales, separadas 1 m entre sí, en el punto medio de la recta que las une. Expresa el resultado en función de G y m.

Intensidad del campo $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0$ ya que al ser de la misma masa y el punto es el punto medio los módulos g_1 y g_2 son iguales pero los vectores tienen la misma dirección pero sentido contrario.

Potencial gravitatorio = $V = V_1 + V_2 = -G\frac{m}{0,5} - G\frac{m}{0,5} = -4Gm$.

⑤ Describe cualitativamente el cambio de peso que sufre una nave espacial de masa m en su viaje de la Tierra a la Luna. Supón que la Tierra y la Luna están en reposo y que la nave se mueve siguiendo la dirección que une sus centros.

Como el peso es P = m·g, la variación del peso depende de la variación de la intensidad gravitatoria g entre ellos. Como demostramos en el ejercicio 2 y problema 31 del tema anterior existe un punto ene. Cual las fuerzas de atracción de la Tierra y la Luna sobre el cuerpo se igualan y por tanto su resultante es nula, en los puntos más cerca de la Tierra la gravedad de la tierra predomina sobre la de la Luna y la resultante va disminuyendo a medida que nos acercamos al punto de equilibrio en que se anula, a partir de ahí la atracción gravitatoria de la Luna es mayor que la de la Tierra, aumentando el valor de la resultante que sería máxima en la superficie de la Luna.(Véase la pag 72 del libro).

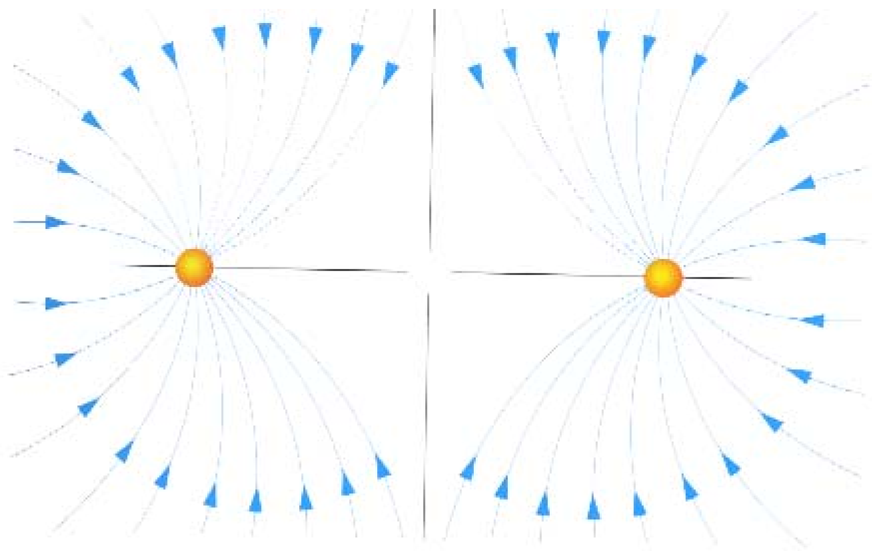
⑥ Dibuja las líneas del campo gravitatorio producido por dos masas puntuales iguales separadas una cierta distancia.

a) ¿Existe algún punto donde la intensidad del campo gravitatorio sea nula? En caso afirmativo, indica dónde.

b) ¿Existe algún punto donde el potencial gravitatorio sea nulo? En caso afirmativo, indica dónde.

a) En el punto medio de la línea que une las masas el vector intensidad del campo gravitatorio resultante, $\vec{g} = -G\dfrac{m}{\left(\dfrac{r}{2}\right)^2}\vec{i} + G\dfrac{m}{\left(\dfrac{r}{2}\right)^2}\vec{i} = 0$,será nulo ya que el módulo es el mismo pero tiene sentido opuesto.

b) Como el campo gravitatorio es un escalar y las masas siempre son positivas el potencial gravitatorio no puede anularse en ningún punto distinto del infinito.



EJERCICIOS

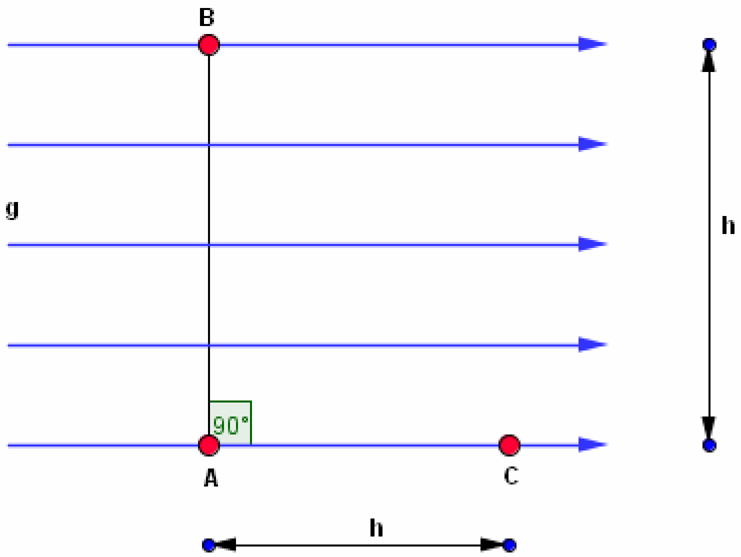
⑦ En la superficie de la Luna, el período de un péndulo simple de 1 m de longitud es T = 4,7 s. Si el radio de la Luna es R_L = 1 738 km:

a) Determina la gravedad en la superficie lunar.
b) Determina la velocidad de escape en la superficie de la Luna.

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Leftrightarrow g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1m}{(4{,}7s)^2} = 1{,}79\,\frac{m}{s^2}$

b) $v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}} = \sqrt{2gR_L} = \sqrt{2 \cdot 1{,}79 \cdot 1738000} = 2492{,}4\,\frac{m}{s^2}$

⑧ En cierta región del espacio existe exclusivamente un campo gravitatorio uniforme, como se indica en la figura.
Se traslada una masa desde el punto A hasta el punto B y otra igual del punto A al punto C. Los trabajos realizados por el campo gravitatorio son, respectivamente:



a) $W_{AB} = 0$; $W_{AC} = mgh$
b) $W_{AB} = 0$; $W_{AC} = -mgh$
c) $W_{AB} = mgh$; $W_{AC} = mgh$
d) $W_{AB} = mgh$; $W_{AC} = mgh$

Como $W_{ij} = \int_i^j \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y la fuerza es horizontal hacia la derecha, que es la dirección y sentido del vector campo, el trabajo entra Ay B es nulo ya que la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares y su producto escalar nulo por tanto, en el caso de A a C la fuerza y el vector desplazamiento llevan la misma dirección y sentido luego el módulo de su producto escalar es F·r·sen0º= F·r = mg·r = mgh, el apartado correcto es pues el **a)**.

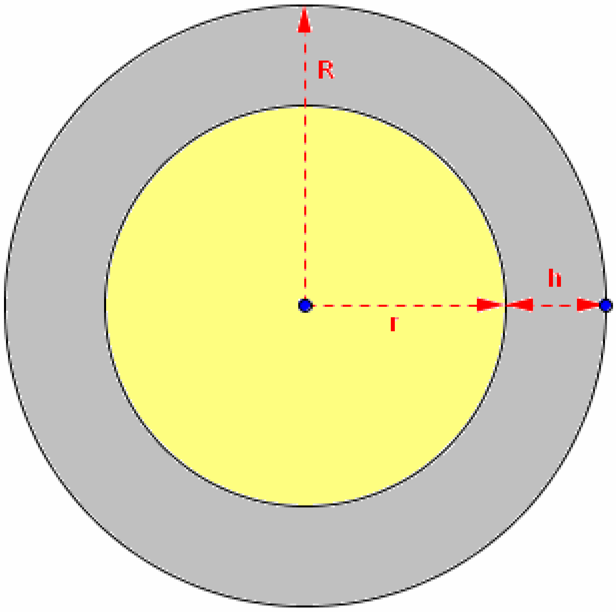
⑨ En la superficie de la Tierra, la intensidad del campo gravitatorio es, aproximadamente, seis veces la existente en la superficie de la Luna. Sabemos que, en la Tierra, un hilo se rompe si se le cuelga un objeto de 5 kg. ¿Qué masa, expresada en kilogramos, rompería ese mismo hilo en la Luna? Razona la respuesta.

Si el hilo se rompe en la Tierra con 5kg la máxima tensión que soporta la cuerda es el peso del cuerpo en la Tierra $T = P_T = m·g_T = 5g_T$, dejando al lado otras consideraciones sobre la variación de la resistencia de los materiales en la Luna, esa será también la máxima tensión que el hilo soportará en la Luna, luego:

$$T = 5g_T = m_L·g_L = m_L·g_T/6 \Leftrightarrow m_L = 30\,\text{kg}.$$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

➊➊ Calcula la gravedad, g, en función de la que existe en la superficie de la Tierra, para un punto situado a una altura, h, mucho menor que el radio de esta, R.



✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

El valor a una profundidad h es:

$$g = G\frac{m}{r^2}$$, m = masa de la esfera de radio r

y a nivel de la superficie terrestre:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R^2}$$

Suponiendo, que ya es suponer, que la densidad no varía con la profundidad, es decir la tierra se puede considerar homogénea, si la profundidad no es muy grande,:

$$\begin{cases} m = \rho·V = \rho·\frac{4}{3}\pi r^3 \\ m = \rho·V_T = \rho·\frac{4}{3}\pi R^3 \end{cases}$$ y dividiendo la dos fórmulas de la gravedad y sustituyendo las masas tenemos:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{G\frac{m}{r^2}}{G\frac{M_T}{R^2}} = \frac{m·R^2}{M_T·r^2} = \frac{\rho·\frac{4}{3}\pi r^3·R^2}{\rho·\frac{4}{3}\pi R^3·r^2} = \frac{r}{R} = \frac{R-h}{R} = 1-\frac{h}{R} \Leftrightarrow g = g_0\left(1-\frac{h}{R}\right)$$

Que nos da la gravedad a una profundidad h en función de la de la superficie g_0.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

➊➊ La energía potencial que corresponde a una molécula viene dada por la expresión:

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$$

En esta expresión, a y b son dos constantes de valor positivo, y x, la distancia entre átomos. ¿Para qué valores de x se anula U(x)? ¿Para qué valores de x pasa U(x) por un mínimo?

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

Si hacemos U(x) = 0 y resolvemos la ecuación tendremos los valores para los cuales **se anula**:

$$U(x)=\frac{a}{x^{12}}-\frac{b}{x^{6}}=0\Leftrightarrow\frac{a}{x^{12}}=\frac{b}{x^{6}}\Leftrightarrow ax^{6}=bx^{12}\Leftrightarrow bx^{12}-ax^{6}=0\Leftrightarrow x^{6}\left(bx^{6}-a\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\sqrt[6]{\dfrac{a}{b}}\end{cases}$$

Como la función U(x) no está definida para x = 0 el otro valor es el que anula la energía potencial.

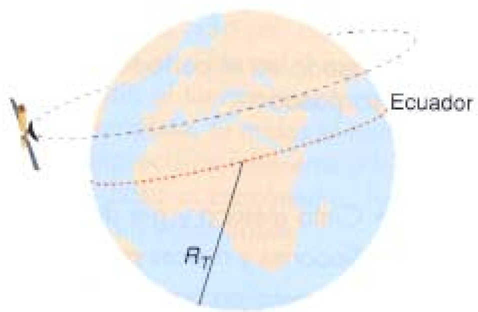
La condición para que una función de una variable(x) tenga extremos relativos es que se anule la primera derivada:

$$U'(x)=0\Rightarrow-\frac{12a}{x^{13}}+\frac{6b}{x^{7}}=0\Leftrightarrow 12ax^{7}-6bx^{13}=0\Leftrightarrow x^{7}\left(12a-6bx^{6}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\sqrt[6]{\dfrac{2a}{b}}\end{cases}$$

Como para x = 0 U(x) no está definida tiene que ser el otro valor el que la haga mínima, de todas formas podemos hacer la derivada segunda y comprobar que es positiva para ese valor:

$$U''(x)=\frac{156a}{x^{14}}-\frac{42b}{x^{8}}\Rightarrow U''\left(\sqrt[6]{\frac{2a}{b}}\right)=\frac{156a}{\left(\sqrt[6]{\frac{2a}{b}}\right)^{14}}-\frac{42b}{\left(\sqrt[6]{\frac{2a}{b}}\right)^{8}}$$ que depende de los valores positivos a y b.

12 Razona por qué es imposible que un satélite artificial describa en torno a la Tierra una órbita que, como la de la figura, no está contenida en el plano del ecuador, sino en otro paralelo a él.



Porque el centro de la órbita, centro de rotación, no coincidiría con el centro de la Tierra, punto donde se supone concentrada toda la masa de la Tierra que genera la atracción gravitatoria.

13 Un planeta tiene un radio que es tres veces mayor que el de otro. Si la densidad de ambos es la misma, ¿en cuál de los dos es mayor el peso de un mismo cuerpo? ¿Cómo afecta esto a la masa de un cuerpo?

La masa (en la mecánica no relativista) es constante y no depende de dónde esté el cuerpo, su peso sí depende de la intensidad gravitatoria, luego, si $R_1 = 3R_2$:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{mg_1}{mg_2}=\frac{g_1}{g_2}=\frac{G\dfrac{M_1}{R_1^2}}{G\dfrac{M_2}{R_2^2}}=\frac{M_1\cdot R_2^2}{M_2\cdot R_1^2}=\frac{\rho V_1R_2^2}{\rho V_2R_1^2}=\frac{V_1R_2^2}{V_2R_1^2}=\frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3R_2^2}{\frac{4}{3}\pi R_2^3R_1^2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{3R_2}{R_2}=3\Leftrightarrow P_1=3P_2$$

PROBLEMAS

①④ Un saltador de longitud consigue una marca de 9,20 metros. ¿Cuál sería la marca de ese mismo saltador en la superficie de la Luna, suponiendo que la longitud del salto es inversamente proporcional a la gravedad?

Datos: $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}38 \cdot 10^{6}$ kg; $M_L = 7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg; $R_L = 1{,}74 \cdot 10^{6}$ kg

Longitud del salto en la Tierra = L_T = 9,20 m = k/g_T.
Longitud del salto en la Luna = $L_L = k/g_L$

Relacionamos:

$$\frac{L_L}{L_T} = \frac{\frac{k}{g_L}}{\frac{k}{g_T}} = \frac{g_T}{g_L} = \frac{G\frac{M_T}{R_T^2}}{G\frac{M_L}{R_L^2}} = \frac{M_T}{M_L}\cdot\left(\frac{R_L}{R_T}\right)^2 = \frac{5{,}98\cdot10^{24}\,\text{kg}}{7{,}24\cdot10^{22}\,\text{kg}}\cdot\left(\frac{1{,}74\cdot10^{6}\,\text{km}}{6{,}38\cdot10^{6}\,\text{km}}\right)^2 = 6{,}14 \Rightarrow L_L = 6{,}14\cdot L_T = 6{,}14\cdot 9{,}20\,\text{m} =$$

56,49 m de longitud saltaría en la Luna.

①⑤ Calcula el campo que crea la Tierra, supuesta puntual, sobre un asteroide situado a 100 000 km de ella. Dato: $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ U.I.

$$g = G\frac{M_T}{r^2} = 6{,}673\cdot10^{-11}\frac{5{,}98\cdot10^{24}}{(100000+6380)^2\cdot10^{6}} = 3{,}75\cdot\frac{m}{s^2}$$

①⑥ En el problema anterior, calcula la energía potencial que posee dicho asteroide cuando lo situamos en ese punto, debido a la acción que ejerce sobre él el campo gravitatorio terrestre.

Dato: La masa del asteroide es 10^9 kg.

$$\Delta Ep = -G\frac{M_T\cdot m}{r} = -6{,}673\cdot10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\cdot10^{24}\cdot10^{9}}{(100000+6380)\cdot10^{3}} = -3{,}75\cdot10^{15}\,\text{J}$$

①⑦ Una niña, de 32 kg de masa, está situada sobre la superficie terrestre:

a) ¿Cuál es su peso?
b) ¿Cuál sería su peso si la masa de la Tierra se redujese a la mitad, sin variar el radio?
c) ¿Cuál sería su peso si el radio de la Tierra se redujese a la mitad, sin variar la masa?
d) ¿Cuál sería su peso si la masa y el radio de la Tierra se redujesen a la mitad?

Como $P = m \cdot g = m \cdot G \dfrac{M_T}{R_T^2}$ = fuerza gravitatoria con que la Tierra atrae a los cuerpos

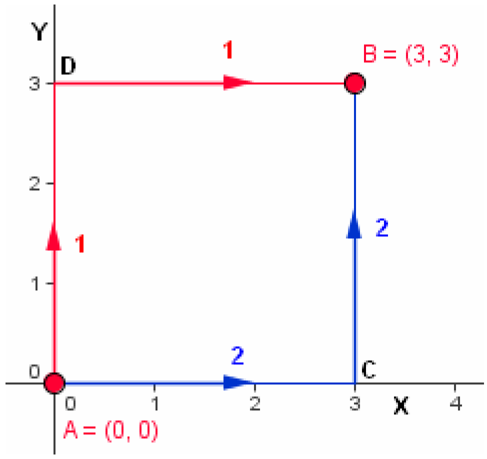
a) $P = m \cdot g_0 = 32\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 313{,}6$ N.
b) Si la M_T se reduce a la mitad como es peso es proporcional a la masa de la Tierra, el peso se reduciría a la mitad, $P_1 = P/2 = 156{,}8$ N.
c) Como el peso es inversamente proporcional al cuadrado del radio terrestre, si este se redujese a la mitad (conservando su masa) el peso se cuadruplicaría (cuadrado de 2), $P_2 = 4P = 1\,254{,}4$ N.
d) La reducción de la masa reduciría el peso a la mitad pero la del radio la cuadruplicaría luego el efecto global sería duplicar el peso $P_3 = 2P = 627{,}2$ N.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

18 Una partícula se mueve del punto A al punto B, impulsada por una fuerza:

$$\vec{F} = 2x\,\vec{i} - 5y\,\vec{j}$$

a) Calcula el trabajo realizado por la fuerza si la trayectoria es 1.
b) Calcula el trabajo realizado por la fuerza si la trayectoria es 2.



✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

a) $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^D \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_D^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^3 \left(2x\,\vec{i} - 5y\,\vec{j}\right) \cdot 3\,\vec{j}\,dy + \int_0^3 \left(2x\,\vec{i} - 5y\,\vec{j}\right) \cdot 3\,\vec{i}\,dx = -\int_0^3 15dy + \int_0^3 6xdx =$

$= -\dfrac{15}{2} y^2 \Big]_0^3 + 3x^2 \Big]_0^3 = -\dfrac{135}{2} + 27 = -\dfrac{81}{2}$ J.

b) $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^3 \left(2x\,\vec{i} - 5y\,\vec{j}\right) \cdot 3\,\vec{i}\,dx + \int_0^3 \left(2x\,\vec{i} - 5y\,\vec{j}\right) \cdot 3\,\vec{j}\,dy = \int_0^3 6xdx - \int_0^3 15ydy =$

$= 3x^2 \Big]_0^3 - \dfrac{15}{2} y^2 \Big]_0^3 = 27 - \dfrac{135}{2} = -\dfrac{81}{2}$ J.

La fuerza produce un campo conservativo ya el trabajo entre dos puntos no depende del camino

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

19 Dado el campo de fuerzas: $\vec{A} = \dfrac{6x^2 - 4}{2x}\vec{i}$ en el que A se mide en newton cuando x se expresa en metros, calcula la diferencia de potencial que existe entre dos puntos situados, respectivamente, a unas distancias x_1= 1 m y x_2 = 2 m del centro del campo.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

$$\Delta V = \int_{x_1}^{x_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \frac{6x^2 - 4}{2x} \vec{i} \cdot \vec{i}\,dx = \int_1^2 \frac{6x^2 - 4}{2x} dx = \frac{3}{2}x^2 - Lx^2 \Big]_1^2 = \left(\frac{3}{2}2^2 - L4\right) - \left(\frac{3}{2}1^2 - L1\right) = \frac{9}{2} + L\left(\frac{1}{4}\right)$$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

②⓪ Determina el campo gravitatorio (módulo, dirección y sentido) resultante de los campos gravitatorios individuales de la Tierra y del Sol, en un punto situado en la recta que une la Tierra y el Sol, a una distancia de 4 ·10^5 km de la Tierra.

Datos: G = 6,67 ·10^{-11} N · m^2 · kg^{-2} ; M_{Tierra} = 5,98 · 10^{24} kg; M_{Sol} = 1,99 · 10^{30} kg; $d_{Tierra-Sol}$ = 15 · 10^7 km

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

Si el punto en queremos hallar el campo está a una distancia de la Tierra d_T = 4·10^5 km, se hallará a una distancia del Sol d_S = $d_{Tierra-Sol}$ – d_T = 15·10^7 km – 4·10^5 km = 1,496 ·10^8 km.

Módulo del campo en ese punto debido a la atracción terrestre:

$$g_T = G\frac{M_T}{d_T^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{(4 \cdot 10^8)^2} = 2{,}49 \cdot 10^{-3}\ \frac{m}{s^2}$$

Módulo del campo en ese punto debido a la atracción Solar:

$$g_S = G\frac{M_S}{d_S^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}99 \cdot 10^{30}}{(1{,}496 \cdot 10^{11})^2} = 5{,}93 \cdot 10^{-3}\ \frac{m}{s^2}$$

Como $g_S > g_T$ la resultante de la suma de los dos vectores tendrá la dirección de la recta que une la Tierra y el Sol y dirigido hacia el Sol:

$$\vec{g} = \vec{g}_S + \vec{g}_T = 5{,}93 \cdot 10^{-3}\ \vec{i} - 2{,}49 \cdot 10^{-3}\ \vec{i} = 3{,}44 \cdot 10^{-3}\ \vec{i}$$

En donde hemos tomado el sentido positivo hacia el Sol.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻