◆ ACTIVIDADES (pág 45)

1 Compara la fuerza gravitatoria que ejercen, uno sobre otro, dos cuerpos de masa M, separados una distancia R, con la que ejercen entre sí dos cuerpos de masa 3 ·M, situados a una distancia R/3.

Realizamos la comparación dividiendo las fuerzas:

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{G\frac{M\cdot M}{R^2}}{G\frac{3M\cdot 3M}{\left(\frac{R}{3}\right)^2}}=\cfrac{1}{\cfrac{9}{\cfrac{1}{9}}}=\frac{1}{91}\Leftrightarrow F_2=91F_1$$ en el segundo caso la fuerza atractiva es 81 veces mayor.

2. Compara ahora la fuerza gravitatoria que ejercen, uno sobre otro, dos cuerpos de masa M, separados una distancia R, con la que ejercen entre sí esos dos mismos cuerpos separados una distancia 2 · R.

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{G\frac{M\cdot M}{R^2}}{G\frac{M\cdot M}{(2R)^2}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4\Leftrightarrow F_1=4F_2$$ ahora el primero ejerce una fuerza cuatro veces mayor, ya que la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

◆ ACTIVIDADES (pág 47)

1. Calcula la fuerza con que se atraen dos láminas planas, de 5000 kg cada una, al situarlas paralelamente, una al lado de la otra, separadas por una distancia de 50 cm.

$$F=G\frac{m\cdot m}{d^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{N}{m^2\cdot kg^2}\cdot\frac{5000^2\,kg^2}{0{,}5^2\,m^2}=6{,}67\cdot 10^{-3}\,N$$

2. ¿Por qué no percibimos en el mundo macroscópico los efectos gravitacionales de un sistema como el que describe la actividad anterior?

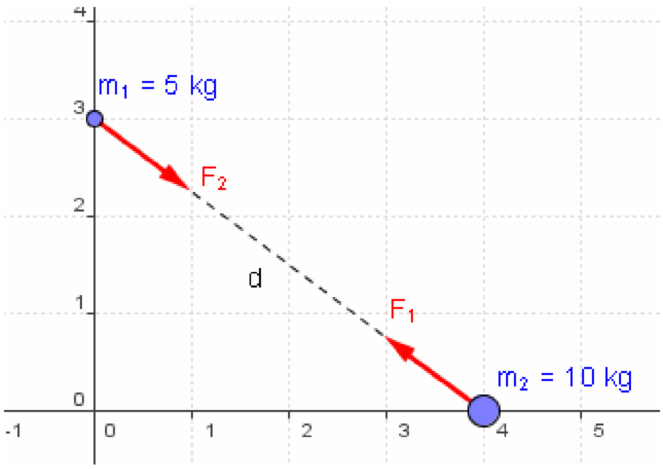
Porque la fuerza es tan pequeña que es inapreciable.

3 *¿En qué punto, a lo largo de la línea que une dos masas, una triple que la otra, se anula el campo gravitatorio resultante?*

Como la fuerza gravitatoria es siempre atractiva, el punto en que se anule debe ser un punto intermedio, más cercano a la de menor masa, ya las fuerzas actúan en la misma dirección pero sentido contrario, y a una distancia x de ella de manera que, si llamamos d a la distancia que las separa, los módulos de las intensidades del campo gravitatorio han de ser iguales:

$$g_1 = g_2 \Leftrightarrow G\frac{m}{x^2} = G\frac{3m}{(d-x)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{d-x}{x}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{d}{x} - 1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{d}{1+\sqrt{3}}$$

4. *Dos masas, de 5 y 10 kg, respectivamente, están situadas en los puntos (0,3) y (4,0) m. Calcula el vector fuerza que actúa sobre cada una de ellas debido a la acción gravitatoria de la otra masa. Dibuja un esquema y representa sobre él las masas y los vectores fuerza.*



La distancia de separación de las masas es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 3 y 4, luego $d^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.

Las fuerzas, una la reacción de la otra, tienen el mismo módulo y dirección pero sentido opuesto. La de atracción de m_1 sobre m_2 (F_1) se ejerce sobre la de masa m_2 y viceversa. Su módulo es:

$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-19}\frac{5 \cdot 10}{25} = 13{,}34 \cdot 10^{-19}\,\text{N}$$

5. *Calcula la masa de un cuerpo que es atraído por otro de 50 t con una fuerza de 10^{-7} N al situarlos a una distancia de 100 m entre sí.*

$$F = G\frac{M \cdot m}{d^2} \Rightarrow m = \frac{F \cdot d^2}{G \cdot M} = \frac{10^{-7} \cdot (100)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-19} \cdot 50000} \approx 3 \cdot 10^{10}\,\text{kg} = 30000000\,\text{t}.$$

6. *¿Con qué fuerza se atraerían los dos objetos de la actividad anterior al acercarlos a 50 m, 20 m, 10 m, 5 m, 2 m y 1 m? Representa la gráfica F-r.*

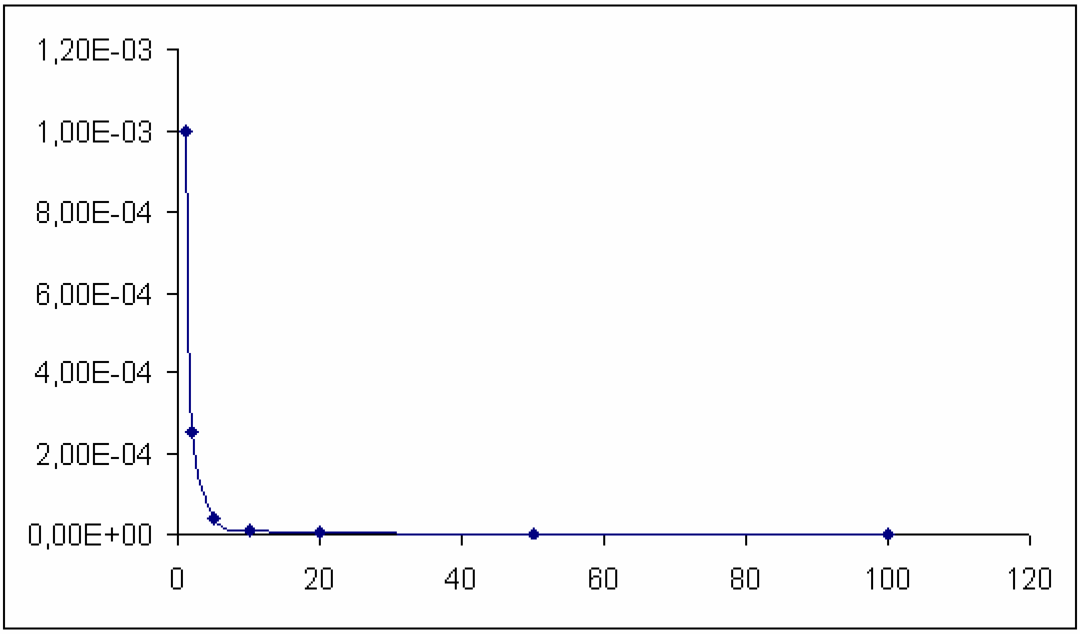
La fuerza de atracción gravitatoria, en función de la distancia (r), es:

$$F = G\frac{M \cdot m}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-19}\frac{5 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{r^2} = 10^{-3} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Tabulamos:

r(m)	100	50	20	10	5	2	1
F(N)	10^{-7}	$4 \cdot 10^{-7}$	$25 \cdot 10^{-7}$	10^{-5}	$4 \cdot 10^{-5}$	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}

…y representamos



✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

7. *Aunque no lo hemos indicado antes, tal como la hemos obtenido, la ley de Newton de la gravitación universal sirve para masas puntuales, es decir, para masas cuya acción gravitatoria pueda suponerse que parte de un solo punto. Analiza esta afirmación e imagina qué problemas aparecen si las masas son extensas.*

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

En la realidad las masas puntuales no existen, pero los planetas que es a los que se aplica esta ley, se pueden consideran masas de simetría esférica para los cuales el campo en punto exterior es el mismo que si se considerase que toda su masa estuviera concentrada en el centro.

Para que esto sea así suponemos además que la distribución de masa en la esfera es uniforme o al menos función inversa de la distancia para que pueda aplicarse esta ley.

Si la simetría no es esférica o la distribución de la masa por su volumen no es homogénea o radial la ley no podría aplicarse.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

ACTIVIDADES (pág 49)

1 *La masa del planeta Júpiter es, aproximadamente, 318 veces la de la Tierra, y su diámetro es 11 veces mayor. Con estos datos, calcula el peso que tendrá en ese planeta un astronauta cuyo peso en la Tierra es de 750 N.*

Masa de Júpiter = M = 318 · masa de la Tierra = 318 m.
Radio de Júpiter = R = 11 · radio terrestre = 11r, ya que la relación entre radios es la misma que entre diámetros.

$$\frac{P_J}{P_T} = \frac{m_a \cdot g_J}{m_a \cdot g_T} = \frac{g_J}{g_T} = \frac{G\frac{M}{R^2}}{G\frac{m}{r^2}} = \frac{\frac{318m}{(11r)^2}}{\frac{m}{r^2}} = \frac{318\ m/r^2}{121\ m/r^2} = \frac{318}{121} \Leftrightarrow P_J = \frac{318}{121}P_T = \frac{318}{121}750\ N = 1971{,}1\ N.$$

2 *Calcula el punto, de la línea recta que une la Tierra con la Luna, en el que la fuerza gravitatoria resultante sobre un objeto de 10 kg de masa es nula. ¿Qué valor toma la energía potencial gravitatoria en ese punto?*
Datos: $M_T = 81 \cdot M_L$; $d_{TL} = 3{,}84 \cdot 10^8$ m.

Sea x = distancia en m desde el punto buscado a la Tierra, en ese punto las fuerzas de atracción gravitatorias de la Tierra y la Luna sobre el objeto de masa m han de ser iguales en módulo:

$$F_T = F_L \Leftrightarrow G\frac{M_T \cdot m}{x^2} = G\frac{M_L \cdot m}{(d_{TL}-x)^2} \Leftrightarrow \frac{81 M_L}{x^2} = \frac{M_L}{(d_{TL}-x)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{d_{TL}-x}{x}\right)^2 = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \frac{d_{TL}}{x} - 1 = \frac{1}{\sqrt{81}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d_{TL}}{x} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow x = \frac{9}{10}d_{TL} = \frac{9}{10}3{,}84 \cdot 10^8\ m = 3{,}456 \cdot 10^8\ m$$

ACTIVIDADES (pág 51)

1 *Calcula el trabajo que debemos realizar para poner en órbita un satélite de 10 kg de masa si la órbita que describe el satélite es circular alrededor de la Tierra y la altura a que se encuentra de la superficie terrestre es de 100 km.*

Aplicamos la fórmula del libro:

$$W = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2(R_T + h)}\right) = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 10\left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6} - \frac{1}{2(6{,}37 \cdot 10^6 + 10^5)}\right) = 3{,}18 \cdot 10^8\ J.$$

2 *Calcula el trabajo que sería necesario realizar, en el caso anterior, si quisiésemos poner un satélite de las mismas características en órbita alrededor de la Luna, también a 100 km de distancia de la superficie lunar.*

$$W = G{\cdot}M_L{\cdot}m{\cdot}\left(\frac{1}{R_L} - \frac{1}{2(R_L + h)}\right) = 6{,}67{\cdot}10^{-11}{\cdot}7{,}35{\cdot}10^{22}{\cdot}10\left(\frac{1}{1{,}74{\cdot}10^{6}} - \frac{1}{2(1{,}74{\cdot}10^{6} + 10^{5})}\right) = 1{,}48{\cdot}10^{7}\ \text{J}.$$

3 *¿Qué conclusión obtienes del resultado de las dos actividades anteriores?*

Que el trabajo es mayor en donde la atracción gravitatoria sobre el satélite es mayor, en la Tierra, que es mayor y atrae con mayor fuerza al satélite.

4 *Calcula la velocidad con que orbita un satélite situado a 200 km de la superficie de la Tierra y la velocidad con que lo hace otro situado a 400 km de dicha superficie.*

De igualar la fuerza centrífuga a la fuerza de atracción gravitatoria, obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{G{\cdot}M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67{\cdot}10^{11}{\cdot}5{,}98{\cdot}10^{24}}{6{,}37{\cdot}10^{6} + 2{\cdot}10^{5}}} = 7791{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Si h = 400 km

$$v = \sqrt{\frac{G{\cdot}M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67{\cdot}10^{11}{\cdot}5{,}98{\cdot}10^{24}}{6{,}37{\cdot}10^{6} + 4{\cdot}10^{5}}} = 7675{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5 *En la actividad anterior, ¿cómo podemos trasladar el satélite de la primera a la segunda órbita? Calcula el trabajo que deberíamos realizar para conseguirlo.*

Comunicándole energía para vencer la energía potencial que será la diferencia del trabajo para ponerlo en esos dos puntos, en función de su masa (m):

$$W = G{\cdot}M_T{\cdot}m{\cdot}\left(\frac{1}{2(R_T + h_2)} - \frac{1}{2(R_T + h_1)}\right) = GM_T{\cdot}m\left(\frac{1}{2(6{,}37{\cdot}10^{6} + 4{\cdot}10^{5})} - \frac{1}{2(6{,}37{\cdot}10^{6} + 2{\cdot}10^{5})}\right) = -896753{,}3m$$

J.

ACTIVIDADES (pág 53)

1 *Un pasajero, de 60 kg de masa, sube en un ascensor, que arranca y se eleva. Calcula el peso aparente del pasajero si:*

- **a)** *El ascensor asciende acelerando a 2 m · s^{-2}.*
- **b)** *El ascensor detiene el movimiento de subida frenando a 2 m · s^{-2}.*
- **c)** *El ascensor desciende acelerando a 2 m · s^{-2}.*
- **d)** *El ascensor detiene el movimiento de bajada frenando con esa misma aceleración.*
- **e)** *El ascensor se mueve, en subida o bajada, con velocidad uniforme.*

Peso = P = mg.
Peso aparente = P_a.

Si fijamos el sistema de referencia fuera del ascensor (inercial) y aplicamos la segunda ley de Newton, tenemos:

$$\vec{P}_a + \vec{P} = m\cdot\vec{a}$$

a) Si asciende con a = 2m/s^2, se cumple, teniendo en cuenta el sentido, ya que las fuerzas y la aceleración tienen la misma dirección:

$$P_a - P = m\cdot a \Leftrightarrow P_a = P + m\cdot a = m\cdot g + m\cdot a = m(g + a) = 60\text{ kg }(9{,}8 + 2)\text{ m/s}^2 = 708\text{ N.}$$

b) Si asciende con a = -2m/s^2 (ya que frena), se cumple, teniendo en cuenta el sentido, ya que las fuerzas y la aceleración tienen la misma dirección:

$$P_a - P = m\cdot a \Leftrightarrow P_a = P + m\cdot a = m\cdot g + m\cdot a = m(g + a) = 60\text{ kg }(9{,}8 - 2)\text{ m/s}^2 = 468\text{ N.}$$

c) Si desciende con a = 2m/s^2, se cumple, teniendo en cuenta el sentido, ya que las fuerzas y la aceleración tienen la misma dirección:

$$P_a - P = -m\cdot a \Leftrightarrow P_a = P - m\cdot a = m\cdot g - m\cdot a = m(g - a) = 60\text{ kg }(9{,}8 - 2)\text{ m/s}^2 = 468\text{ N.}$$

d) Si desciende con a = -2m/s^2, se cumple, teniendo en cuenta el sentido, ya que las fuerzas y la aceleración tienen la misma dirección:

$$P_a - P = -m\cdot a \Leftrightarrow P_a = P - m\cdot a = m\cdot g - m\cdot a = m(g - a) = 60\text{ kg }(9{,}8 + 2)\text{ m/s}^2 = 708\text{ N.}$$

e) Si sube o baja con v = cte, como a = 0, $P_a = P = m\cdot g = 60\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 = 588$ N.

2 *Imagina que vienes de hacer la compra y subes al ascensor con dos bolsas de plástico, bastante pesadas, llenas hasta los topes con lo que has comprado. Un vecino sube al ascensor contigo y, para que no sueltes las bolsas y se te desparrame lo que llevas en ellas, pulsa el botón del piso al que vas. Amablemente, le das las gracias mientras el ascensor se pone en marcha... Poco después estáis los dos limpiando el ascensor y preguntándoos qué ha podido ocurrir... ¿Serías capaz de explicarlo? Antes de responder, piensa en las respuestas que hayas dado al resolver la actividad anterior.*

****

Como el ascensor acelera (a), estaba parado y empieza a moverse, el peso aparente del contenido de las bolsas aumenta ($P_a = m(g + a)$) de manera que, al ser de plástico, se rompen cayendo el contenido al suelo del ascensor.

****

ACTIVIDADES (pág 55)

1 *La masa del Sol es 324440 veces mayor que la de la Tierra, y su radio, 108 veces mayor que el terrestre:*

a) *¿Cuántas veces es mayor el peso de un cuerpo en la superficie del Sol que en la de la Tierra?*
b) *¿Cuál sería la altura máxima alcanzada por un proyectil que se lanzase verticalmente hacia arriba, desde la superficie solar, con una velocidad de 720 km / h?*
Considera $g = 10\ m\ .\ s^{-2.}$

****

Masa del cuerpo = m.

a) Como la masa es constante el peso depende de la intensidad del campo graviatorio:

$$\frac{P_S}{P_T} = \frac{m\cdot g_S}{m\cdot g_T} = \frac{g_S}{g_T} = \frac{G\frac{M_S}{R_S^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{M_S}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{R_S}\right)^2 = \frac{324440M_T}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{108R_T}\right)^2 = \frac{324440}{108^2} = 27{,}81 \Rightarrow P_S = 27{,}81P_T.$$

b) El proyectil alcanzará una altura tal que la energía potencial en ese punto (2) sea igual a la suma de las energías cinética y potencial en la superficie del Sol (1) (principio de conservación de la energía mecánica):

$$Ec + Ep_1 = Ep_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_S\cdot m}{R_S} = -G\frac{M_S\cdot m}{(R_S+h)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}v^2 = GM_S\left(\frac{1}{R_S} - \frac{1}{R_S+h}\right) \Leftrightarrow \frac{v^2}{2GM_S} = \frac{1}{R_S} - \frac{1}{R_S+h} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{R_S+h} = \frac{1}{R_S} - \frac{v^2}{2GM_S} \Leftrightarrow h = \frac{1}{\frac{1}{R_S} - \frac{v^2}{2GM_S}} - R_S = \frac{1}{\frac{1}{108\cdot 6{,}37\cdot 10^6} - \frac{200^2}{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 324440\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}} - 108\cdot 6{,}37\cdot 10^6 =$$

$2{,}46\cdot 10^7$ m

****

2 *En la actividad anterior, calcula la velocidad de escape que debería adquirir un cuerpo para salir del campo gravitatorio del Sol.* Dato: Rsol = 6,82 · 10^8 m

****

$$v_e = \sqrt{2g_S\cdot R_S} = \sqrt{2\cdot 27{,}81 g_0\cdot R_S} = \sqrt{2\cdot 27{,}81\cdot 10\cdot 6{,}82\cdot 10^8} = 615896\ \frac{m}{s}$$

****

3 *En un planeta cuyo radio es $R_T/2$ la aceleración de la gravedad en su superficie es de 5 m · s^-2^. Calcula la relación M_P/M_T y la velocidad de escape desde la superficie del planeta, si $g_T = 10\ m\cdot s^{-2}$ y $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg*

✻✻✻❀❀❀✪❀❀❀✻✻✻

$g_p = 5\ m/s^2$; $g_T = 10\ m/s^2$ $R_P = R_T/2$.

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{G\frac{M_P}{R_P^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{M_P}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{R_P}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{M_P}{M_T} = \frac{g_P}{g_T}\cdot\left(\frac{R_P}{R_T}\right)^2 = \frac{5\frac{m}{s^2}}{10\frac{m}{s^2}}\left(\frac{\frac{R_T}{2}}{R_T}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_P}{R_P}} = \sqrt{\frac{2GM_T/8}{R_T/2}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{4R_T}} = \frac{(v_e)_T}{2} = 5590\frac{m}{s}$$

✻✻✻❀❀❀✪❀❀❀✻✻✻

ACTIVIDADES (pág 57)

1 *Aplica la tercera ley de Kepler para calcular la distancia que separa cada planeta del Sol. Busca lo datos que precises para ello en una enciclopedia.*

✻✻✻❀❀❀✪❀❀❀✻✻✻

Conocidos los períodos orbitales (en años) y aplicando la tercera ley de Kepler hallamos la distancia orbital, pues los de la tierra son conocidos:

$$\frac{r_T^3}{T_T^2} = cte = \frac{(14{,}96\cdot10^{10}\,m)^3}{(1año)^2} = \frac{r^3}{T^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{3{,}35\cdot10^{33}\,T^2}$$

Planetas	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno	Plutón
Período	0,241	0,615	1,00	1,88	11,86	29,46	84,01	164,79	248,5
Distancia(m)	$5{,}79\cdot10^{10}$	$1{,}08\cdot10^{11}$	$14{,}96\cdot10^{10}$	$2{,}28\cdot10^{11}$	$7{,}78\cdot10^{11}$	$1{,}43\cdot10^{12}$	$2{,}87\cdot10^{12}$	$4{,}50\cdot10^{12}$	$5{,}9\cdot10^{12}$

✻✻✻❀❀❀✪❀❀❀✻✻✻

2 *Entre todos los planetas que orbitan en torno al Sol, ¿cuál es el que se mueve más lento? ¿Por qué? Justifícalo, aplicando las leyes de Kepler.*

✻✻✻❀❀❀✪❀❀❀✻✻✻

Como $v = \sqrt{\frac{GM_S}{r}}$ la velocidad de traslación alrededor del Sol es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su distancia al Sol, de manera que los más lejanos se moverán más lentos que los más próximos.

✻✻✻❀❀❀✪❀❀❀✻✻✻

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

① *Del análisis dimensional de la constante de gravitación universal se desprende que podemos expresar esta constante en función de sus magnitudes fundamentales como:*

a) $M^{-1} \cdot L^{3} \cdot T^{-2}$. **b)** $M^{2} \cdot L^{2} \cdot T^{-1}$. **c)** $M^{-1} \cdot L^{2} \cdot T^{-1}$. **d)** $M^{2} \cdot L^{3} \cdot T^{-2}$.

Como la fórmula de la ley de gravitación Universal es $F = G\frac{M \cdot m}{r^2}$ si aplicamos el análisis dimensional, teniendo en cuenta que $[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$, $[M] = [m] = M$ y $[r] = L$, tenemos, despejando G:

$[G] = \frac{[F]\cdot[r]^2}{[M]\cdot[m]} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^2}{M \cdot M} = M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}$ que se corresponde con el apartado **a)**.

② *Un satélite artificial, de masa M, gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio R, con una velocidad v. Si cambia de órbita, pasando a otra más próxima a la Tierra, debe:*

a) *Disminuir la velocidad.*
b) *Aumentar la velocidad.*
c) *No necesita modificar su velocidad.*
d) *La velocidad no influye; son otros factores los que intervienen.*

De igualar la fuerza centrifuga de giro a la de atracción gravitatoria obtenemos la fórmula:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}}$$

En donde vemos que la velocidad sólo depende del radio de la órbita R en que gira el satélite, de forma inversamente proporcional a su raíz, de manera que, si un satélite, pasa a una órbita estacionaria más próxima a la Tierra, su radio de giro será menor y su velocidad se ha de hacer mayor, apartado **b)**.

③ *Al ser G una constante universal:*

a) *El campo gravitatorio que crea una masa es igual en todos los puntos del espacio.*
b) *El campo gravitatorio que crea una masa no depende del medio que rodea al cuerpo.*
c) *El campo gravitatorio que crea una masa depende del medio que rodea al cuerpo.*
d) *Al menos dos de las afirmaciones anteriores son ciertas.*

Sólo es cierta la b), la a) es claramente falsa ya que el campo gravitatorio varía con el cuadrado de la distancia, la c) es falsa ya que el campo sólo depende de la masa y del punto en que nos encontremos, luego la d) también es falsa.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

④ *El momento angular de la Luna respecto a la Tierra y el de la Tierra respecto al Sol son constantes. Podemos afirmar, por tanto, que el momento de la Luna respecto al Sol:*

a) *Es constante.*
b) *No es constante; es mayor en el novilunio (luna nueva).*
c) *No es constante; es mayor en el plenilunio (luna llena).*
d) *Necesitamos más datos para poder indicar algo en uno u otro sentido.*

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

Lo que s constante es el momento angular del sistema completo Luna-Tierra-Sol.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

⑤ *Dos masas, m y m', están separadas una distancia R. Si las aproximamos hasta una distancia 0,1 ·R, el módulo de la fuerza gravitatoria que actúa entre ellas:*

a) *Disminuye 100 veces.*
b) *Disminuye 10 veces.*
c) *Aumenta 10 veces.*
d) *Aumenta 100 veces.*

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

Sea F_1 la fuerza a una separación R y F_2 a una de 0,1R, si aplicamos la ley de Gravitación Universal y comparamos:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{G\frac{m \cdot m'}{(0{,}1R)^2}}{G\frac{m \cdot m'}{R^2}} = \frac{1}{0{,}01} = 100 \Rightarrow F_2 = 100F_1$$ la fuerza aumenta 100 veces como dice el apartado **d)**.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

⑥ *Las teorías de la evolución estelar muestran que, en ciertas etapas de su evolución, las estrellas ordinarias, como el Sol, pueden hincharse considerablemente (gigantes rojas) o contraerse de forma catastrófica (enanas blancas). En el caso del Sol:*

a) *Si se convierte en gigante roja, nos atraerá con más fuerza.*
b) *Si se convierte en enana blanca, nos atraerá con menos fuerza.*
c) *En ambos casos, se modificará la órbita de la Tierra.*
d) *De lo anterior no se deduce ningún cambio gravitacional apreciable para la Tierra.*

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

Lo más “suave” que se puede decir en ambos casos es la c).

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

⑦ *Si un satélite que está girando alrededor de la Tierra pierde parte de su energía, el radio de su nueva órbita es:*

a) *Mayor.*

b) *Menor.*

c) *Se mantiene constante.*

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

Al perder parte de su energía el satélite cae a una órbita menos energética y el radio de su órbita es menor, ya que son inversamente proporcionales.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

⑧ *Indica cómo será la órbita de un planeta si se mueve siempre con la misma velocidad.*

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

Debe de ser una órbita circular, que es la línea que describe un móvil sometido a una fuerza central constante.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

◆ EJERCICIOS

⑨ *La velocidad de escape, ¿depende de la masa del objeto que queremos que escape de la atracción del campo gravitatorio? Razona la respuesta.*

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

$$v_e = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}}$$

Depende de la masa del cuerpo del que escapa, el que produce el campo gravitatorio, pero no de la masa del objeto que escapa.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

⑩ *Un astronauta se aproxima a un planeta desconocido, que posee un satélite. El astronauta realiza las siguientes mediciones: radio del planeta, radio de la órbita circular del satélite y período de revolución del satélite. Indica si puede, con ayuda de estas mediciones (indica con cuáles), calcular:*

a) *La masa del planeta.*

b) *La masa del satélite.*

c) *La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.*

d) *La presión atmosférica en la superficie del planeta.*

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

a) Como $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{G{\cdot}M_P}} \Leftrightarrow M_P = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \dfrac{r^3}{G}$ luego conocidos el período de revolución del satélite(T) y su radio de giro(r), se puede hallar la masa del planeta, M_p.

b) La masa del satélite no puede ser calculada con los datos conocidos pues se simplifica al igualar la fuerza centrífuga a la atractiva.

c) $g_P = G\dfrac{M_P}{R_P^2}$ como conocemos el radio del planeta (R_p) y la masa del planeta (M_P) la hemos calculado en el apartado anterior, podemos hallar g_P.

d) La presión atmosférica o presión que ejerce la atmósfera, en caso de existir, sobre la superficie, no se puede calcular con esos datos, recitamos un barómetro.

❊❊❊❁❁❁✪❁❁❁❊❊❊

⓫ *¿Es posible que un satélite artificial describa una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 1 km/s? Razona la respuesta.*

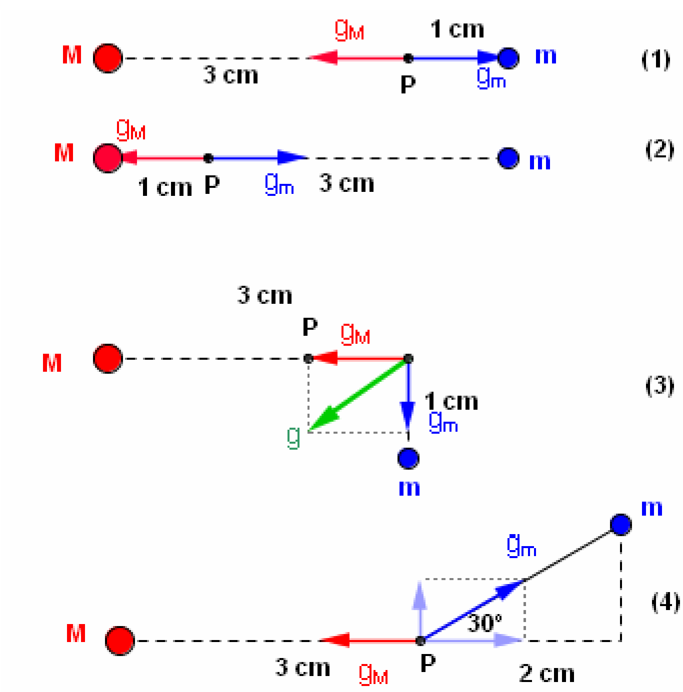
❊❊❊❁❁❁✪❁❁❁❊❊❊

Para que la velocidad de giro sea v = 1000 m/s, el radio orbital debería ser:

$v = \sqrt{\dfrac{G{\cdot}M_T}{R}} \Leftrightarrow R = \dfrac{G{\cdot}M_T}{v^2} = \dfrac{6{,}67{\cdot}10^{-11}{\cdot}5{,}98{\cdot}10^{24}}{1000^2} = 3{,}99{\cdot}10^8\,\text{m}$ es decir estaría a una altura sobre la superficie terrestre de $h = R - R_T = 3{,}99{\cdot}10^8 - 6{,}37{\cdot}10^6\ \text{m} = 3{,}92{\cdot}10^8$ m.

❊❊❊❁❁❁✪❁❁❁❊❊❊

⓬ *Calcula la intensidad de campo gravitatorio que crean dos masas, M y m, en un punto P, en los cuatro casos representados en la figura. En todos ellos, las intensidades de los campos creados por M y m tienen en P como módulo 5 y 20 N/kg, respectivamente.*



❊❊❊❁❁❁✪❁❁❁❊❊❊

(1) Los vectores de la intensidad del campo gravitatorio (que siempre se dirigen hacia la masa que los crea) tienen la misma dirección pero distinto sentido, luego el vector campo resultante es:

$$\vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = -5\,\vec{i} + 20\,\vec{i}\,\frac{N}{kg} = 15\,\vec{i}\,\frac{N}{kg}$$

Y su módulo g = 15 N/kg.

(2) Los vectores de la intensidad del campo gravitatorio (que siempre se dirigen hacia la masa que los crea) tienen la misma dirección pero distinto sentido, luego el vector campo resultante es:

$$\vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = -5\,\vec{i} + 20\,\vec{i}\,\frac{N}{kg} = 15\,\vec{i}\,\frac{N}{kg}$$

Y su módulo g = 15 N/kg.

(3) Ahora los vectores son perpendiculares, su resultante es:

$$\vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = -5\,\vec{i} - 20\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}$$

Y su módulo $g = \sqrt{(-5)^2 + (-20)^2} = 20{,}62\,\frac{N}{kg}$

(4) Ahora el vector intensidad del campo debido a m forma un ángulo de 30º con la horizontal, luego sus componentes según los ejes son:

$$\begin{cases} g_{mx} = g_m \cos 30° = 20 \cos 30° = 17{,}32\,\frac{N}{kg} \\ g_{my} = g_m \operatorname{sen} 30° = 20 \operatorname{sen} 30° = 10\,\frac{N}{kg} \end{cases}$$

Luego el vector campo resultante es:

$$\vec{g} = (-g_M + g_{mx})\,\vec{i} + g_{my}\,\vec{j} = (-5 + 17{,}32)\,\vec{i} + 10\,\vec{j} = 12{,}32\,\vec{i} + 10\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}$$

Y su módulo: $g = \sqrt{12{,}32^2 + 10^2} = 15{,}87\,\frac{N}{kg}$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

①③ En la tabla figuran los radios orbitales promedio y los períodos de revolución de algunos planetas del sistema solar:

	Tierra	Marte	Júpiter
Radio Orbital	149	228	778
Período de revolución	31,6	59,4	374,3

El radio se mide en megakilómetros, y el período, en megasegundos.

a) *¿Justifican los datos la tercera ley de Kepler?*

b) *Escribe la expresión que corresponde a dicha ley y deduce, a partir de ella, la ley de la gravitación universal.*

Considera circulares las órbitas que describen los planetas en su movimiento alrededor del Sol.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

a) La expresión analítica de la tercera ley de Kepler es $\frac{r^3}{T^2} = cte$, vamos a comprobarla para los tres planetas:

Tierra $\rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{149^3}{31{,}6^2} = 3312{,}72$; Marte $\rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{228^3}{59{,}4^2} = 3359{,}17$; Júpiter $\rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{778^3}{374{,}3^2} = 3361{,}24$

Marte y Júpiter dan valores similares y la Tierra del mismo orden hasta las centenas.

b) Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital (tiempo que tarda en dar una vuelta alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de la distancia media con el Sol.

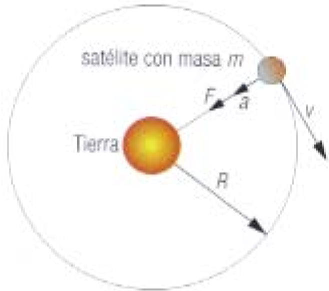
$$\frac{r^3}{T^2} = cte = K$$

donde, T es el periodo orbital, *r* la distancia media del planeta con el Sol y *K* la constante de proporcionalidad.

En la siguiente demostración vamos a considerar que las órbitas planetarias son circunferencias, con el Sol como centro común.

Sea un planeta de masa m, en movimiento alrededor del Sol con un período Ten una órbita circular de radio r. La aceleración centrípeta de un planeta o de cualquier objeto que se mueva uniformemente siguiendo una trayectoria circular es:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2}$$



ya que: $v = 2\pi r/T$
Por tanto, la fuerza centrípeta sobre el planeta debe ser:

$$F = m \cdot a_c = \frac{m \cdot 4\pi^2 \cdot r}{T^2}$$

Y de acuerdo con la tercera ley de Kepler, y sustituyendo este valor en la expresión anterior, resulta para la fuerza sobre el planeta:

$$F = 4\pi^2 \cdot K \cdot \frac{m}{r^2}$$

La fuerza es, pues, directamente proporcional a la masa del planeta e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia medida desde el Sol.

Observa que el factor $4\pi^2K$ sirve para calcular la fuerza centrípeta sobre cualquier planeta en su órbita alrededor del Sol. Por tanto, $4\pi^2K$ depende solo de las propiedades del Sol. Así, la fuerza gravitatoria entre el Sol y una masa m es:

$$F = \frac{(4\pi^2 K_S) \cdot m}{r^2}$$

Llegados a este punto, la cuestión es: ¿qué es lo que determina el valor de $4\pi^2K_S$? Newton responde a la pregunta que nos hemos hecho anteriormente con una hipótesis muy sencilla que consiste en suponer que $4\pi^2K_S$ es proporcional a la masa del Sol, es decir:

$$4\pi^2 K_S = G\, m_s$$

donde G es una constante de proporcionalidad.

Newton generalizó los resultados obtenidos en el Sistema Solar a todos los cuerpos del universo, de manera que, según esta hipótesis, la fuerza gravitatoria de atracción que un cuerpo de masa m_1, ejerce sobre otro de masa m_2 situado a una distancia r se convierte en:

$$F = (4\pi^2 K_S) \cdot \frac{m_2}{r^2} = G \cdot m_1 \cdot \frac{m_2}{r^2}$$

Así mismo, de acuerdo con el principio de acción y reacción, la masa m_2 ejerce también una fuerza gravitatoria sobre m_1:

$$F = (4\pi^2 K_S) \cdot \frac{m_1}{r^2} = G \cdot m_{21} \cdot \frac{m_1}{r^2}$$

Estas fuerzas son iguales en magnitud pero de sentidos opuestos, luego:

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Expresión que resume la ley de Newton de la Gravitación Universal:

Dos cuerpos cualesquiera se atraen el uno al otro con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

✻✻✻✿✿✿✿✿✿✿✿✻✻✻

①④ *Calcula el período de un satélite artificial que describe una órbita alrededor de la Tierra a una distancia de 10 km sobre su superficie.*

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2 $\cdot$kg^{-2} $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; R_T = 6 370 km = $6{,}37 \cdot 10^6$ m.

✻✻✻✿✿✿✿✿✿✿✿✻✻✻

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G \cdot M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}37 \cdot 10^6 + 10^4)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}} = 5069{,}9\,\text{s} \approx 1{,}41\,\text{hr}$$

✻✻✻✿✿✿✿✿✿✿✿✻✻✻

①⑤ *Una masa se desplaza en un campo gravitatorio desde un lugar en que su energía potencial vale -200 J hasta otro donde vale -400 J. ¿Cuál es el trabajo realizado por o contra el campo?*

a) *-200 J* **b)** *200 J* **c)** *-600 J*

✻✻✻✿✿✿✿✿✿✿✿✻✻✻

$W = \Delta Ep = Ep_2 - Ep_1$ = - 400 J – (-200 J) = - 200 J , apartado **a)**.

✻✻✻✿✿✿✿✿✿✿✿✻✻✻

①⑥ *La Tierra tarda un año en describir su órbita en torno al Sol. Esta órbita es, aproximadamente, circular, con radio $R = 1{,}49\ 10^{11}$ m. Sabiendo que $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$, calcula la masa del Sol.*

✻✻✻✿✿✿✿✿✿✿✿✻✻✻

Si igualamos la aceleración centrípeta de la Tierra a la atracción gravitatoria de esta con el Sol y usamos la tercera ley de Kepler, tenemos, despejando la masa del Sol:

$$M_S = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}49 \cdot 10^{11})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (1 \cdot 365 \cdot 86400)^2} = 1{,}969 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$$

✻✻✻✿✿✿✿✿✿✿✿✻✻✻

①⑦ *Si un cuerpo tiene un peso de 100 N sobre la superficie terrestre, calcula su peso en la superficie de otro planeta cuya masa sea el doble que la de la Tierra y su radio sea el triple que el de la Tierra.*

✻✻✻✿✿✿✿✿✿✿✿✻✻✻

$P_T = 100$ N, $M_p = 2M_T$, $R_P = 3R_T$

La relación entre los pesos será igual a la relación entre las aceleraciones de la gravedad en los planetas, ya que la masa es la misma:

$$\frac{P_P}{P_T}=\frac{m\cdot g_P}{m\cdot g_T}=\frac{g_P}{g_T}=\frac{G\frac{M_P}{R_P^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}}=\frac{M_P}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{R_P}\right)^2=\frac{2M_T}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{3R_T}\right)^2=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}\Rightarrow P_P=\frac{2}{9}P_T=\frac{2}{9}\cdot 100=22,\widehat{2}\text{ N.}$$

✻✻✻✻✻✻✻✪✻✻✻✻✻✻✻

①⑧ La distancia entre el Sol y Mercurio es $57,9\cdot10^6$ km y entre el Sol y la Tierra es $149,6\cdot10^6$ km. Suponiendo que las órbitas de ambos planetas son circulares, calcula la velocidad con que ambos giran alrededor del Sol, si M_{Sol} = 1,99 . 10^{30} kg.

✻✻✻✻✻✻✻✪✻✻✻✻✻✻✻

$$v_{Mercurio}=\sqrt{\frac{G\cdot M_{Sol}}{r_{Mercurio}}}=\sqrt{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot1,99\cdot10^{30}}{57,9\cdot10^{9}}}=4,79\cdot10^4\ \frac{m}{s}$$

$$v_{Tierra}=\sqrt{\frac{G\cdot M_{Sol}}{r_{Tierra}}}=\sqrt{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot1,99\cdot10^{30}}{149,6\cdot10^{9}}}=2,98\cdot10^4\ \frac{m}{s}$$

✻✻✻✻✻✻✻✪✻✻✻✻✻✻✻

①⑨ Un planeta posee un radio doble que el de la Tierra, siendo su densidad igual a la de la Tierra. ¿Dónde será mayor el peso de un objeto, en el planeta o en la Tierra? Especifica cuánto.

✻✻✻✻✻✻✻✪✻✻✻✻✻✻✻

Sea:

R_T = radio de la Terra
R_P= radio del Planeta = $2\cdot R_T$.
ρ =densidades de la Tierra y del planeta.
P_P = peso del objeto en el planeta.
P_T= peso del objeto en la Tierra.

$$\frac{P_P}{P_T}=\frac{m\cdot g_P}{m\cdot g_T}=\frac{g_P}{g_T}=\frac{G\frac{M_P}{R_P^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}}=\frac{M_P}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{R_P}\right)^2=\frac{\rho\cdot V_P}{\rho\cdot V_T}\cdot\left(\frac{R_T}{2R_T}\right)^2=\frac{V_P}{V_T}\cdot\left(\frac{R_T}{2R_T}\right)^2=\frac{\frac{4}{3}\pi R_P^3}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}\cdot\left(\frac{R_T}{2R_T}\right)^2=\frac{(2R_T)^3}{R_T^3}\cdot\left(\frac{R_T}{2R_T}\right)^2=$$

$$=\frac{8R_T^3}{R_T^3}\cdot\left(\frac{R_T}{2R_T}\right)^2=\frac{8}{4}=2\,.$$

Luego el peso en el planeta es el doble que el del objeto en la Tierra

✻✻✻✻✻✻✻✪✻✻✻✻✻✻✻

②⓪ *El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio (posición más próxima al Sol), el cometa está a $8{,}75\cdot10^{7}$ km del Sol, mientras que en el afelio (posición más alejada del Sol), se encuentra a $5{,}26\cdot10^{9}$ km de este:*

a) *¿En cuál de los dos puntos tiene el cometa mayor velocidad? ¿Y mayor aceleración?*
b) *¿En qué punto tiene mayor energía potencial? ¿Y mayor energía mecánica?*

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

a) Como según la 2ª ley de Kepler , la velocidad aerolar es constante, para lo cual cuanto más alejado esté el cometa del Sol, más lentamente ha de moverse y viceversa para que la superficie barrica por unidad de tiempo se mantenga constante. Sin embargo la aceleración es inversa al cuadrado de la distancia aumenta cuando está más cerca disminuyendo cuando está más lejos.

b) La energía potencial va disminuyendo, en módulo, a medida que se aleja del Sol, haciéndose más negativa a medida que se acerca al Sol:

$$Ep = -G\frac{M_S\cdot m_c}{r}$$

La energía mecánica se conserva en toda su trayectoria, en el caso ideal con ausencia de fuerzas disipativas.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

②① *La Luna es, aproximadamente, esférica, con radio $R = 1{,}74\cdot10^{6}$ m y masa $m = 7{,}35\cdot10^{22}$ kg.*

a) *Calcula la aceleración de la gravedad en la superficie lunar.*
b) *Si se deja caer una piedra desde una altura de 2 m sobre la superficie lunar, ¿cuál será su velocidad al chocar con la superficie?*

Dato: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N . m$^2\cdot$kg^{-2}

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

a) $$g_L = G\frac{m}{R^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{7{,}35\cdot10^{22}}{(1{,}74\cdot10^{6})^2} = 1{,}62\,\frac{m}{s^2}$$

b) Aplicando el teorema de conservación de la energía mecánica:

$$Ec_{suelo} = Ep_{arriba} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mg_L\cdot h \Leftrightarrow v = \sqrt{2\cdot g_L\cdot h} = \sqrt{2\cdot1{,}62\cdot2} = 2{,}54\,\frac{m}{s}$$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

PROBLEMAS

②② Se sabe que la distancia promedio Tierra-Luna es 384000 km y que la Luna tarda 28,5 días en describir una vuelta completa en torno a la Tierra. Con esos datos, calcula la distancia a que debe encontrarse un satélite artificial que gira en torno a la Tierra para que su período de revolución sea un día.

Aplicamos la tercera ley de Kepler a los dos satélites, el natural, la Luna, y el artificial:

$$\frac{r_S^3}{T_S^2} = \frac{r_L^3}{T_L^2} \Leftrightarrow r_S = r_L \sqrt[3]{\frac{T_S^2}{T_L^2}} = 384000\sqrt[3]{\frac{1^2}{28{,}5^2}} = 41\ 156 \text{ km.}$$

②③ Calcula la distancia media al Sol del cometa Kohoutec, sabiendo que su período estimado es 10^6 años.

$$r = \sqrt[3]{\frac{G{\cdot}M_{Sol}{\cdot}T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67{\cdot}10^{-11}{\cdot}1{,}99{\cdot}10^{30}{\cdot}(10^6{\cdot}365{\cdot}86400)^2}{4\pi^2}} = 1{,}49{\cdot}10^{15} \text{ m.}$$

②④ Un satélite gira en órbita circular alrededor de la Tierra a 150 000 km de distancia de su centro. Si hubiese otro satélite en órbita circular alrededor de la Luna que tuviese la misma velocidad, ¿a qué distancia del centro de la Luna se encontraría? La masa de la Luna es 0,0123 veces la de la Tierra y su volumen es cincuenta veces menor.

Si tienen la misma velocidad su período es el mismo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{r_T^3}{G{\cdot}M_T}}$

$$r = \sqrt[3]{\frac{G{\cdot}M_L{\cdot}T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{G{\cdot}M_L{\cdot}4\pi^2\frac{r_T^3}{GM_T}}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{M_L}{M_T}{\cdot}r_T^3} = \sqrt[3]{\frac{0{,}0123M_T}{M_T}{\cdot}(1{,}5{\cdot}10^8)^3} = 3{,}46{\cdot}10^4 \text{ km.}$$

②⑤ ¿Con qué velocidad angular de rotación debe girar un satélite artificial, alrededor de la Tierra, para que lo haga en una órbita de radio el doble del radio de la Tierra?

Datos: R_T = 6 370 km; g = 9,81 m/s²

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G{\cdot}M_T}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{8R_T^{\ 3}}{g_0{\cdot}R_T^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{8R_T}{g_0}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{8{\cdot}6{,}37{\cdot}10^6}{9{,}8}}} = 4{,}38{\cdot}10^{-4}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

②⑥ *Un proyectil sale disparado perpendicularmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 5 000 m/s. Calcula la altura que alcanzará.*

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

El proyectil alcanzará una altura tal que la energía potencial en esa altura sea igual a la suma de las energías cinética y potencial en el punto de lanzamiento (superficie terrestre):

$$Ec_s + Ep_s = Ep_h \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T \cdot m}{R_T} = -G\frac{M_T \cdot m}{R_T + h} \Leftrightarrow \frac{v^2}{2GM_T} = \frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \Leftrightarrow h = \frac{1}{\frac{1}{R_T} - \frac{v^2}{2GM_T}} - R_T =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6} - \frac{5000^2}{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}} - 6{,}37 \cdot 10^6 \approx 1{,}59 \cdot 10^6\,\text{m} = 1590\,\text{km}$$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

②⑦ *Un satélite de 250 kg de masa describe una órbita circular en torno a la Tierra a una altura sobre su superficie de 500 km. Calcula:*

a) *Su velocidad.*
b) *Su período de revolución.*
c) *Las energías cinética y potencial del satélite.*
d) *La energía necesaria para ponerlo en órbita.*

Datos: G = 6,67 $\cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻² R_T = 6 370 km; M_T = 6 $\cdot 10^{24}$ kg

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

a) $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5}} = 7632\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{(6{,}37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}} = 900\,\text{s} = 15\,\text{min.}$

c) $Em = Ec + Ep = \frac{1}{2}m\frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)} - m\frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)} = -\frac{1}{2}m\frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)} = -\frac{1}{2}250\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5} = -7{,}28 \cdot 10^9\,\text{J}.$

d) $W = Gm M_T \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2(R_T + h)}\right) = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 250 \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot \left(\frac{1}{6{,}37 \cdot 10^6} - \frac{1}{2(6{,}37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5)}\right) = 8{,}42 \cdot 10^{-9}\,\text{J}$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

②⑧ *Un satélite de 300 kg de masa se mueve en una órbita circular a 5·10⁷ m por encima de la superficie terrestre. Calcula la fuerza de gravedad que actúa sobre el satélite, la velocidad con que se mueve y el período con que orbita. Considera R_T = 6 500 km.*

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

Como $g_0 = G\dfrac{M_T}{R_T^2}$ y $g = G\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2}$ si dividimos miembro a miembro tenemos:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{G\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2}}{G\dfrac{M_T}{R_T^2}} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} = \frac{1}{\dfrac{(R_T+h)^2}{R_T^2}} = \frac{1}{\left(\dfrac{R_T+h}{R_T}\right)^2} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{h}{R_T}\right)^2} \text{ luego:}$$

$$g = \frac{g_0}{\left(1+\dfrac{h}{R_T}\right)^2} = \frac{9{,}81}{\left(1+\dfrac{5\cdot 10^7}{6{,}5\cdot 10^6}\right)^2} = 0{,}13\,\frac{m}{s^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{R_T+h}} = \sqrt{\frac{g_0\cdot R_T^2}{R_T+h}} = \sqrt{\frac{9{,}81\cdot(6{,}5\cdot 10^6)^2}{6{,}5\cdot 10^6+5\cdot 10^7}} = 2708{,}5\,\frac{m}{s}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{g_0\cdot R_T^2}} = \sqrt{\frac{(6{,}5\cdot 10^6+5\cdot 10^7)^3}{9{,}81\cdot(6{,}5\cdot 10^6)^2}} = 20860{,}5\text{ s}.$$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

29 *En la superficie de un planeta de 1000 km de radio, la aceleración de la gravedad es 2 m/s2. Teniendo esto en cuenta, calcula:*

a) *La energía potencial gravitatoria de un objeto de 50 kg de masa que se encuentra situado en la superficie del planeta.*

b) *La velocidad de escape desde su superficie.*

c) *La masa del planeta.*

Dato: G = 6,67 ·10^{-11} U.I.

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

a) $Ep = -G\dfrac{m\cdot M}{r} = -mr\left(G\dfrac{M}{r^2}\right) = -mr\cdot g = -50\text{kg}\cdot 10^6\text{m}\cdot 2\dfrac{m}{s^2} = -10^8\text{ J}.$

b) $v_e = \sqrt{\dfrac{2G\cdot M}{r}} = \sqrt{2\cdot r\dfrac{G\cdot M}{r^2}} = \sqrt{2\cdot r\cdot g} = \sqrt{2\cdot 10^6\text{m}\cdot 2\dfrac{m}{s^2}} = 2000\,\dfrac{m}{s}.$

c) $g = G\dfrac{M}{r^2} \Leftrightarrow M = \dfrac{g\cdot r^2}{G} = \dfrac{2\dfrac{m}{s^2}\cdot(10^6\text{m})^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\dfrac{N\cdot m^2}{kg^2}} = 3\cdot 10^{22}\text{kg}$

✻✻✻❁❁❁✪❁❁❁✻✻✻

30 *La Luna tiene una masa, aproximada, de $7{,}36\cdot10^{22}$ kg y su radio es $1{,}74\cdot10^{6}$ m. Con estos datos, calcula la distancia que recorrerá en cinco segundos un cuerpo que cae libremente en las proximidades de su superficie. Dato: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ U.I.*

Comenzamos por hallar la gravedad en la superficie de la luna ya que el cuerpo se halla próximo a su superficie:

$$g_L = G\frac{M_L}{R_L^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot\frac{7{,}36\cdot10^{22}\,kg}{(1{,}74\cdot10^{6})^2 m^2} \approx 1{,}62\frac{m}{s^2}$$

Y después, aplicando las fórmulas del movimiento de caída de cuerpos:

$$h = v_0t + g_Lt^2 = 0 + 1{,}62\frac{m}{s^2}\cdot5^2s^2 = 40{,}5\text{ m recorre.}$$

31 *Una cápsula espacial, de masa m, que viaja entre la Tierra y la Luna, se encuentra a una distancia X del centro de la Tierra. Suponiendo que la distancia entre la Tierra y la Luna es L y teniendo en cuenta las fuerzas gravitatorias ejercidas por la Tierra y la Luna, exclusivamente, calcula la expresión que permite hallar la fuerza resultante que actúa sobre la nave. Demuestra que esa fuerza es nula a la distancia:*

$$\frac{L}{1+\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}}$$

siendo M_L y M_T las masas de la Luna y de la Tierra, respectivamente.

Fuerza resultante = F = $F_T - F_L$ siendo F_T la fuerza con que la Tierra atrae a la cápsula y F_L la fuerza con que la atrae la Luna.

$$F = F_T - F_L = G\frac{M_T\cdot m}{X^2} - G\frac{M_L\cdot m}{(L-X)^2} = Gm\left(\frac{M_T}{x^2} - \frac{M_L}{(L-X)^2}\right)$$

El punto en que la fuerza es nula será cuando sean iguales en módulo, ya que tienen la misma dirección y sentido contrario:

$$F_T = F_L \Rightarrow G\frac{M_T\cdot m}{X^2} = G\frac{M_L\cdot m}{(L-X)^2} \Leftrightarrow \frac{M_T}{X^2} = \frac{M_L}{(L-X)^2} \Leftrightarrow \frac{(L-X)^2}{X^2} = \frac{M_L}{M_T} \Leftrightarrow \left(\frac{L-X}{X}\right)^2 = \frac{M_L}{M_T} \Leftrightarrow \frac{L-X}{X} = \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}$$

$$\frac{L}{X} - 1 = \sqrt{\frac{M_L}{M_T}} \Leftrightarrow \frac{L}{X} = 1 + \sqrt{\frac{M_L}{M_T}} \Leftrightarrow X = \frac{L}{1+\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}}$$

32 *Al enviar un satélite a la Luna, se le sitúa en una órbita que corta la recta que une los centros de la Tierra y la Luna por el punto en que las fuerzas que sufre el satélite por la atracción de los dos astros son iguales. Cuando el satélite se encuentra en ese punto, calcula:*

a) *La distancia a la que está del centro de la Tierra.*

b) *La relación que existe entre las energías potenciales del satélite, debidas a la Tierra y a la Luna.*

Datos: La masa de la Tierra es 81 veces la masa de la Luna y la distancia que separa la Tierra de la Luna es $3{,}84 \cdot 10^8$ m.

a) Hemos obtenido la fórmula en el ejercicio anterior:

$$X = \frac{L}{1+\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}} = \frac{3{,}84\cdot 10^8\,m}{1+\sqrt{\frac{M_L}{81M_L}}} = \frac{3{,}84\cdot 10^8\,m}{1+\sqrt{\frac{1}{81}}} = \frac{3{,}84\cdot 10^8\,m}{1+\frac{1}{9}} = 3{,}456\cdot 10^8 \text{ m de la Tierra.}$$

b) $$\frac{Ep_T}{Ep_L} = \frac{-G\frac{M_T\cdot m}{X}}{-G\frac{M_L\cdot m}{L-X}} = \frac{M_T}{M_L}\cdot\frac{L-X}{X} = \frac{M_T}{M_L}\cdot\left(\frac{L}{X}-1\right) = \frac{M_T}{M_L}\sqrt{\frac{M_L}{M_T}} = \sqrt{\frac{M_L}{M_T}\cdot\left(\frac{M_T}{M_L}\right)^2} = \sqrt{\frac{M_T}{M_L}} = \sqrt{\frac{81M_L}{M_L}} = \sqrt{81} = 9$$

La energía potencial debida a la Tierra es 9 veces mayor que la de la debida a la Luna

33 *La mayor velocidad de giro de un satélite de la Tierra, conocida como primera velocidad cósmica, es la que se obtendría para un radio orbi tal igual al radio terrestre, R_T. Teniendo esto en cuenta, calcula:*

a) *La primera velocidad cósmica.*

b) *El período de revolución que le corresponde si orbita con esa velocidad.*

Datos: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻², $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m

a) $$v = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{R_T+h}} = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{R_T+R_T}} = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{2R_T}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{2\cdot 6{,}37\cdot 10^6}} = 5595{,}37\,\frac{m}{s}$$

b) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot M_T}} = \sqrt{\frac{(2\cdot 6{,}37\cdot 10^6)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}} = 2276{,}9\text{ s}.$$

34 *En la superficie de un planeta de 2 km de radio la aceleración de la gravedad es de 3 m/ s². Calcula la velocidad de escape desde la superficie del planeta y la masa del planeta.*

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²

$$v_e = \sqrt{\frac{2G\cdot M}{R_P}} = \sqrt{2\cdot R_P\frac{G\cdot M}{R_P^2}} = \sqrt{2\cdot R_P\cdot g} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 10^3\,m\cdot 3\frac{m}{s^2}} = 109{,}5\,\frac{m}{s}$$

$$g = G\frac{M}{R_P^2} \Leftrightarrow M = \frac{g\cdot R_P^2}{G} = \frac{3\frac{m}{s^2}\cdot(2\cdot 10^3 m)^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}} = 1{,}8\cdot 10^{17}\text{ kg}.$$

35 *La nave espacial lunar Prospector permanece en órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 100 km sobre su superficie. Determina:*

a) *La velocidad lineal de la nave y el período del movimiento.*

b) *La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa órbita.*

Datos: G = 6,67 ·10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}, Masa de la Luna: M_L = 7,36 ·10^{22} kg, Radio medio lunar: R_L = 1470 km

❃❃❃❃❃❃❃✪❃❃❃❃❃❃❃

a) $$v=\sqrt{\frac{G\cdot M_L}{R_L+h}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 7{,}36\cdot 10^{22}}{1{,}47\cdot 10^{6}+10^{5}}}=1768{,}3\,\frac{m}{s}\;;\;T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot M_L}}=\sqrt{\frac{(1{,}47\cdot 10^{6}+10^{5})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 7{,}36\cdot 10^{22}}}=887{,}9\text{ s}.$$

b) $$v_e=\sqrt{\frac{2G\cdot M_L}{r}}=\sqrt{\frac{2G\cdot M_L}{R_L+h}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 7{,}36\cdot 10^{22}}{1{,}47\cdot 10^{6}+10^{5}}}=2500\,\frac{m}{s}.$$

❃❃❃❃❃❃❃✪❃❃❃❃❃❃❃

36 *El radio de la Tierra es, aproximadamente, 6 370 km. Si elevamos sin razonamiento un objeto de 20 kg de masa a una altura de 300 km sobre su superficie:*

a) *¿Cuánto pesa el objeto a esa altura?*

b) *¿Cuál será el incremento de su energía potencial?*

c) *Si se dejara caer desde esa altura, ¿con qué velocidad llegaría a la superficie de la Tierra?*

Datos: G = 6,67 ·10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}, Masa y radio de la Tierra: M_T = 5,98 · 10^{24} kg; R_T = 6 370 km

❃❃❃❃❃❃❃✪❃❃❃❃❃❃❃

a) $$P=m\cdot g=m\cdot G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}=20\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{(6{,}37\cdot 10^{6}+3\cdot 10^{5})^2}=179{,}3\text{ N}.$$

b) $$\Delta Ep=Ep_2-Ep_1=-G\frac{M_T\cdot m}{R_T+h}+G\frac{M_T\cdot m}{R_T}=-GM_T\cdot m\left(\frac{1}{R_T+h}-\frac{1}{R_T}\right)=$$

$$=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 20\left(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^{6}+3\cdot 10^{5}}-\frac{1}{6{,}37\cdot 10^{6}}\right)=5{,}6\cdot 10^{7}\text{ J}.$$

c) La variación de energía potencial es igual a la energía cinética en la superficie:

$$\Delta Ep=Ec\rightarrow\frac{1}{2}mv^2=\Delta Ep\Leftrightarrow v=\sqrt{\frac{2\Delta Ep}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 5{,}6\cdot 10^{7}}{20}}=2373{,}3\,\frac{m}{s}.$$

❃❃❃❃❃❃❃✪❃❃❃❃❃❃❃

37 *La Luna describe una órbita circular en torno a la Tierra en 28 días. La masa de la tierra es 6·10^{24} kg, y G = 6,67·10^{-11}N . m^2 . kg^{-2}:*

a) *Calcula la distancia que separa el centro de la Tierra del centro de la Luna.*

b) *Calcula la masa de la Luna, sabiendo que una partícula de masa m podría estar en equilibrio en un punto alineado con los centros de la Tierra y de la Luna, a una distancia del centro de la Tierra de 3,4·10^{8} m.*

c) *Si en la Luna, cuyo radio es 1,7·10^{6} m, se deja caer sin velocidad inicial un objeto desde una altura de 10 m, ¿con qué velocidad llegará al suelo?*

✻✻✻✿✿✿✪✿✿✿✻✻✻

a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{G{\cdot}M_T}}\quad r = \sqrt[3]{\dfrac{G{\cdot}M_T{\cdot}T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{6{,}67{\cdot}10^{-11}{\cdot}6{\cdot}10^{24}{\cdot}(28{\cdot}86400)^2}{4\pi^2}} = 3{,}9{\cdot}10^8$ m.

b) Según vimos en el ejercicio ③①:

$$\frac{M_L}{M_T} = \left(\frac{L-X}{X}\right)^2 \Leftrightarrow M_L = M_T\left(\frac{L-X}{X}\right)^2 = 6{\cdot}10^{24}\left(\frac{3{,}9{\cdot}10^8 - 3{,}4{\cdot}10^8}{3{,}4{\cdot}10^8}\right)^2 = 8{,}8{\cdot}10^{23}\ \text{kg}.$$

c) La variación de energía potencial de la superficie de la luna a una altura h será igual a la energía cinética al llegar a la superficie, según el principio de conservación de la energía mecánica:

$$Ec = \Delta Ep \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = -GM_L{\cdot}m\left(\frac{1}{R_L+h} - \frac{1}{R_L}\right) \Leftrightarrow v = \sqrt{2GM_L{\cdot}\left(\frac{1}{R_L} - \frac{1}{R_L+h}\right)} =$$

$$= \sqrt{2{\cdot}6{,}67{\cdot}10^{-11}{\cdot}8{,}8{\cdot}10^{23}\left(\frac{1}{1{,}7{\cdot}10^6} - \frac{1}{1{,}7{\cdot}10^6+10}\right)} = 20{,}15\frac{m}{s}.$$

✻✻✻✿✿✿✪✿✿✿✻✻✻

③⑧ *Un satélite de 1000 kg de masa gira en una órbita geoestacionaria. Calcula:*

a) *Su velocidad angular.*

b) *El módulo de su aceleración normal.*

c) *Su energía total.*

Dato: Radio de la Tierra, R_T = 6 370 km

✻✻✻✿✿✿✪✿✿✿✻✻✻

Si la órbita es geoestacionaria, el periodo = T = 1 día = 24·3600 = 86 400 s.

a) $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi\text{rad}}{86400\text{s}} = 7{,}27{\cdot}10^{-5}\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$

b) Como $a_N = \omega^2{\cdot}r$ necesitamos saber el radio de la órbita geoestacionaria, r:

$$r = \sqrt{\frac{g_0{\cdot}R_T^2{\cdot}T^2}{4{\cdot}\pi^2}} = \sqrt{\frac{9{,}8{\cdot}(6{,}37{\cdot}10^6)^2{\cdot}(86400)^2}{4{\cdot}\pi^2}} = 42{,}21{\cdot}10^6\ \text{m}$$

Luego $a_N = \omega^2{\cdot}r = (7{,}27{\cdot}10^{-5})^2{\cdot}42{,}21{\cdot}10^6 = 0{,}22\dfrac{m}{s^2}$.

c) La energía total es la energía mecánica en la órbita que es suma de la cinética y potencial:

$$Em = Ec + Ep = -G\frac{M_T{\cdot}m}{r} + \frac{1}{2}G\frac{M_T{\cdot}m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T{\cdot}m}{r} = -\frac{g_0{\cdot}R_T^2{\cdot}m}{2r} = -\frac{9{,}81{\cdot}(6{,}37{\cdot}10^6)^2{\cdot}1000}{2{\cdot}42{,}21{\cdot}10^6} = -4{,}72{\cdot}10^9\ \text{J}.$$

✻✻✻✿✿✿✪✿✿✿✻✻✻

③⑨ *Un astronauta, con 100 kg de masa (incluyendo el traje), se encuentra sobre la superficie de un asteroide de forma prácticamente esférica y 2,4 km de diámetro, cuya densidad media es 2,2 g /cm^3. Determina:*

a) *La velocidad con que debe impulsarse al astronauta para abandonar el asteroide.*
b) *¿Cómo se denomina dicha velocidad?*
c) *El astronauta carga ahora con una mochila cuya masa es 40 kg. ¿Le será más fácil salir del asteroide? ¿Por qué?*

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

a) $$v_e = \sqrt{\frac{2G{\cdot}M}{R}} = \sqrt{\frac{2G{\cdot}\rho{\cdot}V}{R}} = \sqrt{\frac{2G{\cdot}\rho{\cdot}\frac{4}{3}\pi R^3}{R}} = \sqrt{\frac{8}{3}G{\cdot}\rho{\cdot}R^2} = \sqrt{\frac{8}{3}{\cdot}6{,}67{\cdot}10^{-11}{\cdot}2{,}2{\cdot}10^3{\cdot}(1{,}2{\cdot}10^3)^2} = 0{,}75\,\frac{m}{s}$$

b) La velocidad de escape de la atracción gravitatoria del asteroide.

c) La velocidad de escape no depende de la masa del cuerpo que desea escapar, luego seguirá siendo la misma, pero la energía cinética que hay que comunicar para lograr esa velocidad de escape sí depende de la masa, como la masa total del astronauta ha aumentado deberá emplear mayor energía para conseguir esa velocidad de escape, luego le será más difícil.

④⓪ *Se desea situar un satélite artificial de 50 kg de masa en una órbita circular sobre el ecuador de modo que se mueva con un radio de giro igual al doble del terrestre. Calcula:*

a) *La energía que hay que comunicar al satélite y la velocidad orbital de este.*
b) *La energía adicional que habría que aportar al satélite en órbita para que escape a la acción del campo gravitatorio terrestre.*

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6\ 370$ km

a) Energía mecánica en la superficie = energía mecánica en la órbita, luego:

$$-G\frac{M_T{\cdot}m}{R_T} + Ec = -G\frac{M_T{\cdot}m}{R_T+h} + \frac{1}{2}G\frac{M_T{\cdot}m}{R_T+h} \Leftrightarrow Ec = GM_Tm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2(R_T+h)}\right) = GM_Tm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2(R_T+2R_T)}\right) =$$

$$= GM_Tm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{6R_T}\right) = GM_Tm\frac{5}{6R_T} = 6{,}67{\cdot}10^{-11}{\cdot}5{,}98{\cdot}10^{24}{\cdot}50{\cdot}\frac{5}{6{\cdot}6{,}37{\cdot}10^6} = 2{,}61{\cdot}10^9\ J.$$

$$\text{Velocidad: } v = \sqrt{\frac{G{\cdot}M_T}{R_T+h}} = \sqrt{\frac{G{\cdot}M_T}{R_T+2R_T}} = \sqrt{\frac{G{\cdot}M_T}{3R_T}} = \sqrt{\frac{6{,}67{\cdot}10^{-11}{\cdot}5{,}98{\cdot}10^{24}}{3{\cdot}6{,}37{\cdot}10^6}} = 4568{,}6\,\frac{m}{s}.$$

b) Tiene que vencer la energía potencial a esa altura:

$$E = G\frac{M_T \cdot m}{r} = G\frac{M_T \cdot m}{3R_T} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 50}{3 \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6}} = 1{,}04 \cdot 10^{9}\ \text{J}$$

❄❄❄✿✿✿✿❍✿✿✿✿❄❄❄

④① Un satélite artificial se dice geoestacionario si está siempre en la vertical de un cierto punto de la Tierra:

a) *¿A qué altura están dichos satélites?*
b) *¿Qué momento cinético respecto al centro de la Tierra tiene un satélite geoestacionario si su masa es de 100 kg?*
c) *¿Por qué no puede haber un satélite geoestacionario en la vertical de las islas Baleares?*

Datos: g_0 =9,81 m/s^2; R_T = 6 370 km.

❄❄❄✿✿✿✿❍✿✿✿✿❄❄❄

a) $r = \sqrt[3]{\frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9{,}81 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2 \cdot (86400)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 42{,}21 \cdot 10^6\ \text{m}$, su altura es pues h = r – R_T = 42,21·10^{6}m – 6,37·10^6 m = 38,54·10^6 m sobre la superficie terrestre.

b) $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \Rightarrow L = rmv$, luego necesitamos la velocidad de giro en la órbita v:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2}{42{,}21 \cdot 10^6}} = 3071\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

L = rmv = 42,21·10^{6}m·100kg·3 071 m/s = 1,3·10^{13} kg·m^2/s.

c) Una **órbita geoestacionaria** o **GEO** es una órbita geosíncrona directamente encima del ecuador terrestre, con una excentricidad nula. Desde tierra, un objeto geoestacionario parece inmóvil en el suelo y, por tanto, es la órbita de mayor interés para los operadores de satélites artificiales (incluyendo satélites de comunicación y de televisión). Debido a que su latitud siempre es igual a 0º, las locaciones de los satélites sólo varían en su longitud. Luego no puede estar el satélite en la vertical de las Baleares pues no están en el ecuador, su latitud es alrededor de 40º.

❄❄❄✿✿✿✿❍✿✿✿✿❄❄❄

④② Un satélite artificial de 100 kg de masa describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 500 km sobre su superficie. Si su período de revolución es T_1 = 5 665 s, determina:

a) *La velocidad del satélite en la órbita.*
b) *Las energías cinética, potencial y total del satélite en la citada órbita, y la necesaria para transferir este satélite a otra órbita de período T_2 = 7 200 s.*

Datos: G = 6,67 ·10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}; R_T = 6 370 km

❄❄❄✿✿✿✿❍✿✿✿✿❄❄❄

a) $v = \frac{2\pi}{T} \cdot (R_T + h) = \frac{2\pi}{5665} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5) = 7619{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) $Ep = -G\dfrac{M_T \cdot m}{R_T + h} = -\dfrac{g_o R_T^2 \cdot m}{R_T + h} = -\dfrac{9{,}81 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2 \cdot 100}{6{,}37 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5} = -5{,}79 \cdot 10^9$ J.

$Ec = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}100 \cdot 7619{,}7^2 = 2{,}9 \cdot 10^9$ J.

$E_1 = E_T = Ep + Ec = -2{,}89 \cdot 10^9$ J.

La energía necesaria para pasar a una órbita de período T_2 mayor será la diferencia de energía entre ambas órbitas, como ya tenemos la energía en la primera, vamos a hallar la energía en la segunda:

Radio de la segunda órbita

$$r = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2 \cdot (7200)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 8{,}06 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$E_2 = Ec + Ep = -G\frac{M_T \cdot m}{r} + \frac{1}{2}G\frac{M_T \cdot m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{2r} = -\frac{9{,}81 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2 \cdot 100}{2 \cdot 8{,}06 \cdot 10^6} = -4{,}94 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Luego la energía necesaria para pasar de una a otra órbita es:

$E = E_2 – E_1 = - 4{,}94 \cdot 10^9 J – (- 2{,}89 \cdot 10^9 J) = - 2{,}05 \cdot 10^9 J$.